

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ
SAMRAS-2016
СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ
ЗАОЧНОГО ТУРА № 2



Самара, 2016 г.

Дорогие друзья!

Все задачи, представленные Вашему вниманию в данном релизе, являются оригинальными и составлены в соответствии с *Перечнем вопросов по астрономии, рекомендуемых предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады по астрономии и физике космоса для подготовки школьников 10-11 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач олимпиады по астрономии SAMRAS-2016 среди учащихся 10-11 классов заочного тура № 2». – <http://v937184r.bget.ru/SamRAS.htm>

Автор задач – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева, к.ф.-м.н., методист СДДЮТ.

Верстка в системе L^AT_EX – Филиппов Ю.П.

Памятка участника SamRAS-2016

1. Официальная страница Астрошколы:

<http://v937184r.bget.ru/SamRAS.htm>

2. Официальная группа в VK:

<http://vk.com/samras2016>

3. Электронный ящик SamRAS-2016:

samras2016@mail.ru

4. Сроки подачи работ SamRAS-2016 тура № 2 на проверку:

01.03.2016-30.04.2016!!!

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Прямое и попятное движения небесных тел»

Условие. Какие небесные тела на звездном небосводе Земли могут совершать как прямые, так и попятные движения? Почему это происходит? Поясните на примере одного из ближайших таких тел к Земле, как образуется петля попятного движения. (3 балла).

Задача № 2. «Галактики, видимые невооруженным глазом»

Условие. Назовите известные Вам галактики, (также укажите их видимую звездную величину и расстояние до них в парсеках) которые, в принципе (в идеальных условиях), могут наблюдаться невооруженным среднестатистическим глазом с поверхности (какой-либо ее точки) Земли? (за каждый правильный ответ 1 балл).

Задача № 3. «Транзит самолета и солнечное затмение»

Условие. На рис. 1 представлена редкая фотография транзита самолета по диску Луны, во время солнечного затмения. Полагая, что корпус самолета лежит в картинной плоскости, определите на каком расстоянии, находился от наблюдателя самолет, если известно, что это был самолет Airbus A321, длина которого составляет $\ell = 45$ м. (3 балла).



Рис. 1: фотография транзита самолета по диску Луны, во время солнечного затмения (источник: сайт общего доступа астрономической тематики).

Задача № 4. «Высота полета и время транзита самолета»

Условие. Опираясь на данные предыдущей задачи, оцените по фотогра-

фии 1 а) линейную высоту H над Землей, на которой летел самолет, если солнечное затмение наблюдалось на высоте $h_{\odot} = 15^{\circ}$; б) время его транзита по диску Луны, если известно, что самолет следовал со своей максимальной крейсерской скоростью $V = 840$ км/ч, причем вектор скорости самолета все это время лежал в картинной плоскости и был направлен вдоль корпуса самолета. (4 балла).

Задача № 5. «Покрывание Луной звезд, видимых невооруженным глазом»

Условие. На звездном небе имеется приблизительно 6 тысяч звезд ярче 6^m . Считая, что они распределены по небосводу равномерно, оцените, сколько таких звезд Луна покрывает за один сидерический месяц? Какова частота таких покрытий? Какое максимальное количество таких звезд может покрыть Луна за большой промежуток времени, например, за 558 лет? Угол наклона орбиты Луны к плоскости эклиптики равен $i_{\zeta} = 5^{\circ}9'$. (4 балла).

Задача № 6. «Нетрадиционный способ использования лупы»

Условие. Традиционно выделяют два способа использования лупы как инструмента, предназначенного для наблюдения мелких предметов, расположенных на конечном расстоянии, а именно, *традиционный* и *нетрадиционный*. Первый способ использования подразумевает, что рассматриваемый предмет находится на расстоянии, немного меньшем ее фокусного расстояния (f), а глаз наблюдателя расположен вплотную к лупе. В этих условиях данный инструмент даст прямое увеличенное и мнимое изображение предмета. При этом увеличение лупы определяется как

$$\Gamma_0 = 1 + \frac{d_0}{f}, \quad (1)$$

где d_0 – расстояние наилучшего зрения (для взрослого человека средних лет $d_0 = 25$ см). При нетрадиционном способе лупу располагают на вытянутой руке на расстоянии L от глаза, рассматривая не мнимое, а действительное перевернутое изображение предмета (расположенного за фокусом лупы), формируемое лупой перед глазом на расстоянии (d_0) наилучшего зрения. Представьте вывод формулы для увеличения лупы в нетрадиционном способе использования. При каком условии, с помощью данной лупы, нетрадиционным способом можно добиться большего увеличения чем при традиционном? Какова должна быть величина L , чтобы данное условие выполнялось для лупы с $\Gamma_0 = 6^{\times}$? (5 баллов).

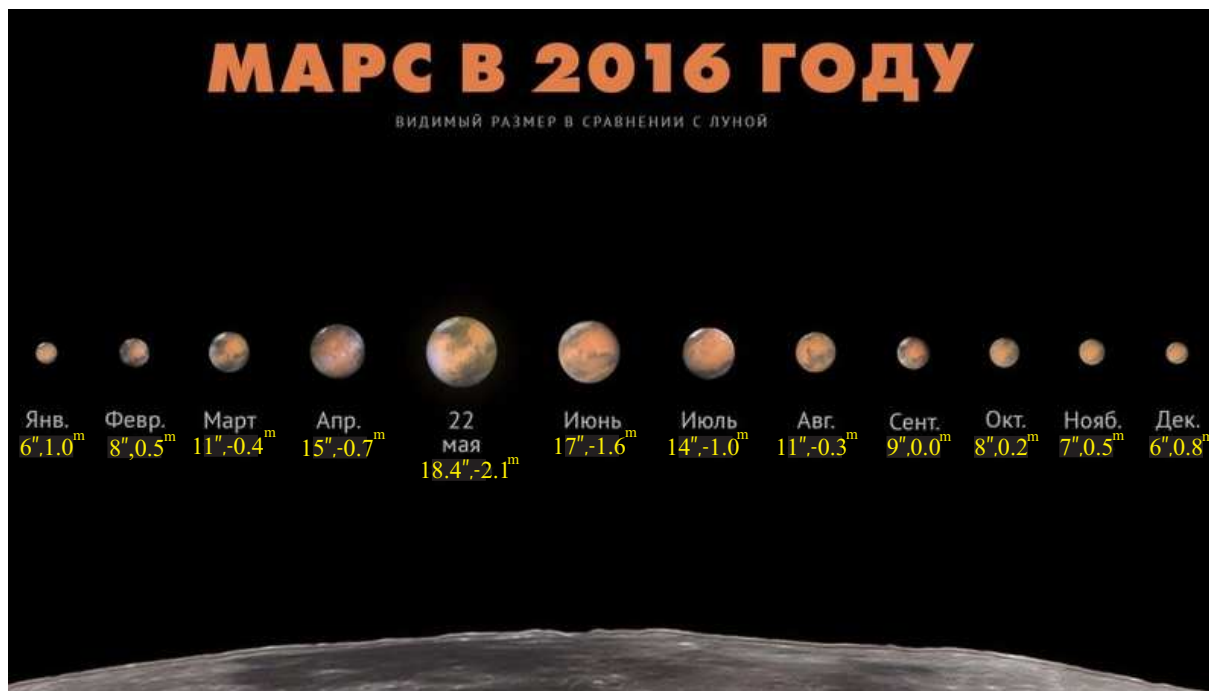


Рис. 2: к определению видимого образа Марса в различные моменты 2016 года, на фоне части диска Луны (источник: astro-lert.ru).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Ближайшие квадратуры Марса»

Условие. На рис. 2 даны образы Марса (с указанием его углового диаметра и видимой звездной величины), которыми будет представляться данная планета землянину ежемесячно в 2016 году. Только с использованием радиуса Красной планеты ($R_{\text{Марс}} = 3396$ км) и данных, представленных на рис. 2, определите какой из образов (укажите соответствующий ему месяц) будет соответствовать ему в а) западной квадратуре, б) восточной квадратуре? Оцените даты данных событий, угловые диаметры и видимую звездную величину Красной планеты в указанных конфигурациях. Орбиты Марса и Земли считать круговыми. Радиус земной орбиты равен $a_{\oplus} = 1.00$ а.е., а период ее обращения вокруг Солнца – $T_{\oplus} = 1.000$ год. (6 баллов).

Задача № 8. «Частота двойных транзитов Меркурия и Венеры»

Условие. Как часто происходили бы транзиты одновременно Меркурия и Венеры (двойной транзит) по диску Солнца, если бы их плоскости орбит совпадали с плоскостью орбиты Земли, а сами орбиты были круговыми? Какова максимальная продолжительность двойного транзита? Сидерические периоды обращения Меркурия, Венеры и Земли принять равными $T_{\text{Мер}} = 87.9691$ сут, $T_{\text{Вен}} = 224.6980$ сут, $T_{\oplus} = 365.2564$ сут соответственно, радиус земной орбиты – $a_{\oplus} = 1.000$ а.е. (7 баллов).

Задача № 9. «Восход Луны в полнолуние»

Условие. Астрономом-любителем была получена фотография Луны (см. рис. 3) на восходе в полнолуние. Оцените высоту центра диска Луны и ее



Рис. 3: фотография Луны на восходе в полнолуние (источник: сайт общего доступа астрономической тематики).

видимую звездную величину с учетом поглощения света. Для учета поглощения света атмосферой следует воспользоваться следующей формулой для интенсивности света¹:

$$\mathcal{I}_{vis} = \mathcal{I}_0 P^{M(z)}, \quad \text{где} \quad (2)$$

$$M(z) = \frac{1}{\cos z + 0.50572 (96.07995 - z)^{-1.6364}}. \quad (3)$$

здесь \mathcal{I}_{vis} – интенсивность света небесного источника света у поверхности Земли, регистрируемого наблюдателем; \mathcal{I}_0 – интенсивность света того же источника на верхней границе атмосферы; P – коэффициент прозрачности атмосферы (в нашем случае следует принять $P = 0.75$), $M(z)$ – **воздушная масса** – отношение оптической толщины атмосферы, проходимой лучами света от источника при зенитном расстоянии источника z (в градусах), к оптической толщине, проходимой при положении источника в зените ($z = 0^\circ$), определяемая формулой (3) Кастена-Янга (Kasten-Young). Следует полагать, что видимая звездная величина Луны в фазе полнолуния, наблюдаемой в зените ($z = 0^\circ$), равна $m_V^{(0)} = -12.7^m$. (8 баллов).

Задача № 10. «Просветляющее покрытие для линз биноклей и телескопов»

Условие. Для чего наносят просветляющее покрытие на рабочие поверхности линз биноклей и телескопов? Какое физическое явление здесь исполь-

¹ Смотри, например, Зверева С.В. В мире солнечного света. – Л.:Гидрометеиздат. – 1988. – 160с.

зуется? Какие варианты просветления сегодня используются для астрономических инструментов? Инструмент с каким вариантом просветления является наилучшим для астрономических наблюдений? Вычислите минимальную толщину однослойного покрытия (с показателем преломления $n_c = \sqrt{n_g}$, где $n_g = 1.925$ – показатель преломления флинтгласа, сорта оптического стекла) линзы, чтобы лучи света, отвечающие максимальной чувствительности человеческого глаза и падающие нормально на ее поверхность, смогли пройти без отражения от поверхности? (8 баллов).

Задача № 11. «Продолжительность истинных солнечных суток у планет»

Условие. У какой классической планеты продолжительность истинных солнечных суток минимальная, а у какой – максимальная? С использованием традиционных справочных данных выполните максимально точно расчет искомой величины для всех классических планет Солнечной системы. (9 баллов).

Задача № 12. «Транзит Земли по диску Солнца и его наблюдение»

Условие. Вычислите (как можно точнее) величину телесного угла, соответствующего области небесной сферы, с которой можно наблюдать а) полный б) частный транзит Земли по диску Солнца. Орбиту Земли считать эллиптической. Какова величина в) относительного изменения потока солнечного излучения (в %) и г) амплитуды падения блеска Солнца при полном транзите планеты по диску центральной звезды, если его наблюдать с расстояния 10 пк? (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Кривая блеска НАТ-Р-7 и определение отношения радиусов тел»

Условие. С использованием транзитного метода была получена кривая блеска (см. рис. 4) звезды НАТ-Р-7. Форма кривой обусловлена движением вокруг последней экзопланеты НАТ-Р-7b, периодическими прохождением ее по диску материнской звезды и последующими затмениями. Найдите аналитическую связь между глубиной транзита (ΔF) и отношением радиусов планеты и звезды (R_p/R_*). Определите по данной кривой

- а) глубину транзита (ΔF) экзопланеты НАТ-Р-7b,
- б) отношение (R_p/R_*),
- в) период обращения экзопланеты. (11 баллов).

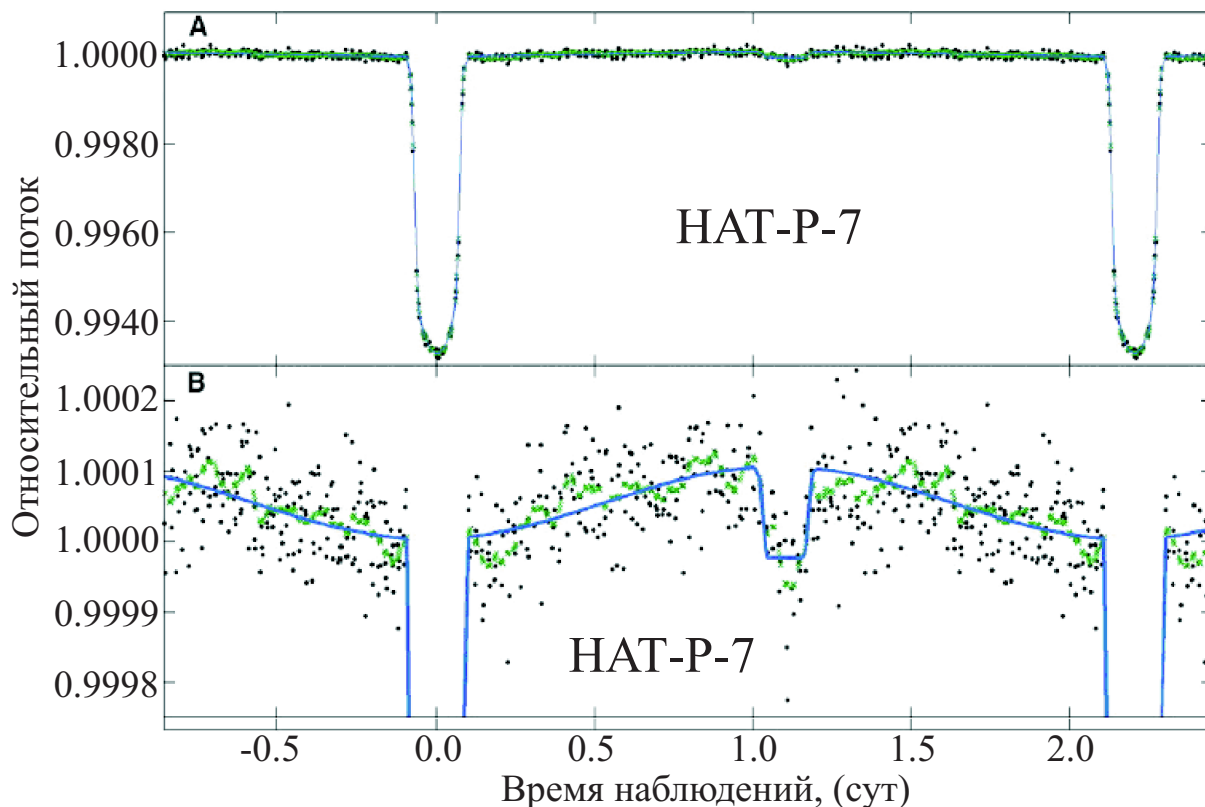


Рис. 4: кривая блеска звезды HAT-P-7. Нижняя кривая показана с лучшим разрешением. Более глубокий минимум соответствует прохождению планеты HAT-P-7b по диску звезды, вторичный – затмению планеты родительской звездой (источник: NASA).

Задача № 14. «Определение вероятности обнаружения транзита экзопланеты»

Условие. Предположим, что экзопланета радиуса R_p движется вокруг центральной звезды радиуса R_* по орбите, близкой к круговой (но с отличным от нуля эксцентриситетом, т.е. $\varepsilon \neq 0$), с большой полуосью a , периодом P . Предполагая, что всевозможные ориентации орбиты экзопланеты равновероятны, найдите аналитическое выражение для

- вероятности принципиальной возможности детектирования феномена транзита экзопланеты по диску данной материнской звезды,
- вероятности детектирования феномена центрального транзита экзопланеты по диску данной материнской звезды в данный момент времени.

Выполните численный анализ полученных результатов на примере Солнца и всех классических планет. (12 баллов).

Задача № 15. «Времена транзитов (затмений) экзопланеты HAT-P-7b»

Условие. Экзопланета HAT-P-7b (с радиусом R_p) движется вокруг материнской звезды HAT-P-7 (с радиусом R_*) по орбите, близкой к круговой (т.е. эксцентриситет $\varepsilon = 0$), с большой полуосью a , наклонением i к картинной плоскости и периодом P . Найдите аналитические выражения для

- полного времени транзита (затмения) (Δt_t) – промежутка времени, отсчитываемого от момента начала прохождения (затмения) плане-

ты по диску (диском) материнской звезды, до момента ее полного схода (выхода) с (из-за) диска звезды,

б) времени полного транзита (затмения) (Δt_f) – промежутка времени, отсчитываемого от момента, когда диск планеты полностью "зашел" на (за) диск материнской звезды, до момента начала выхода планеты с (из-за) диска звезды

как функции параметров \mathfrak{R}_p , \mathfrak{R}_* , i , a и P . По кривой блеска звезды НАТ-Р-7 (см. рис. 4) определите указанные времена. (13 баллов).

Задача № 16. «Определение основных параметров системы "НАТ-Р-7"»

Условие. С использованием данных и результатов решения задач № 13 и 15 настоящего тура, кривой блеска звезды НАТ-Р-7 (см. рис. 4), а также известных теоретических инструментов, в частности, – связи массы (\mathfrak{M}_*) и радиуса (\mathfrak{R}_*) звезды:

$$\mathfrak{R}_* = k \mathfrak{M}_*^\chi, \quad (4)$$

где k и χ – коэффициенты для конкретного класса светимости звезды (в случае НАТ-Р-7, следует полагать $k = 1.06$, $\chi = 0.945$, данные параметры представлены в солнечных массах и радиусах соответственно), определите следующие параметры для звезды и экзопланеты: 1) \mathfrak{R}_* , \mathfrak{M}_* , 2) большую полуось (a) орбиты экзопланеты и ее наклонение (i), 3) радиус экзопланеты \mathfrak{R}_p . Выполнить численный анализ результатов на примере системы НАТ-Р-7. (13 баллов).

Задача № 17. «Максимальное количество горячих юпитеров, которые можно зарегистрировать в наблюдениях транзитным методом»

Условие. Оцените максимальное количество экзопланет типа «горячий юпитер» (большая полуось которых равна $a = 0.05$ а.е., эксцентриситет равен нулю, а орбита может иметь всевозможные ориентации), которые можно

а) в принципе, зарегистрировать в наблюдениях,

б) зарегистрировать в данный момент

с помощью ПЗС-матрицы, охватывающей участок небосвода с размерами $2^\circ \times 2^\circ$ и установленной в фокусе телескопа (нацеленного на определенный участок небосвода) с диаметром объектива $D_T = 40$ см у звезд спектральных классов F, G, K . Известно, что транзит экзопланеты (в идеальных условиях) еще можно наблюдать с помощью данного инструмента, если звездная величина звезды как минимум на $\Delta m = 1^m$ меньше проникающей силы телескопа. Концентрация звезд указанных спектральных классов составляет $n = 0.02$ пк $^{-3}$, а доля экзопланет данного типа, относительно количества таких звезд есть $\alpha_{HJ} = 0.03$. В качестве значений необходимых для расчетов

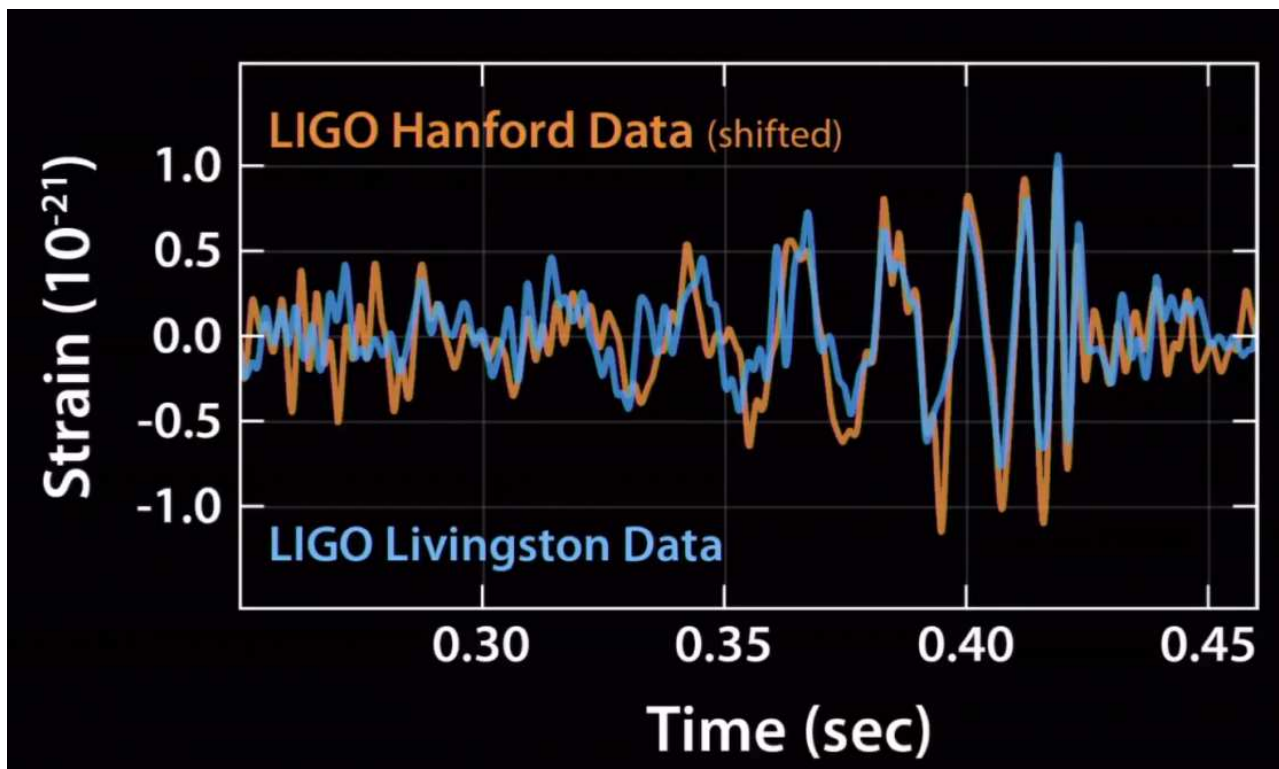


Рис. 5: кривые искомого сигнала, полученные с помощью двух крупных лазерных интерферометров, расположенных неподалеку от Ливингстона (штат Луизиана) и Хэнфорда (Вашингтон).

параметров звезд и экзопланет используйте соответствующие значения для Солнца и Юпитера. (14 баллов).

Задача № 18. «Открытие гравитационных волн и слияние черных дыр»

Условие. Участниками проектов Advanced LIGO и Virgo 11 февраля 2016 года на пресс-конференции Национального научного фонда США было официально объявлено о фиксации сигнала от гравитационных волн акустического диапазона². По заверению авторов открытия, источником волн стало слияние двух черных дыр. На рис. 5 представлены кривые искомого сигнала, определяющие специфический характер этого процесса – на рисунке, очевидно, повышение частоты колебаний со временем, что обусловлено взаимным падением тел друг на друга, во вращательном движении вокруг общего центра масс (что и предсказывала Общая теория относительности для сливающихся массивных объектов). С использованием данной кривой и известных теоретических инструментов оцените

1. частоту (ω_0) и период (P_0) обращения черных дыр вокруг общего центра масс в момент слияния;
2. массы черных дыр \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 (в массах Солнца) и их радиусы \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2

²*Гравитационные волны* – колебания гравитационного поля, то есть периодические изменения метрики пространства-времени (так называемая "рябь пространства-времени"). В общей теории относительности и в большинстве других современных теорий гравитации гравитационные волны порождаются движением массивных тел с переменным ускорением. Гравитационные волны свободно распространяются в пространстве со скоростью света. Ввиду относительной слабости гравитационных сил (по сравнению с прочими) эти волны имеют весьма малую величину, с трудом поддающуюся регистрации.

(в км), если по асимметрии пиков кривых сигнала было определено отношение масс тел – $\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_2 = 1.24$.

3. радиус \mathfrak{R}_3 образовавшейся черной дыры;
4. частоту (ω_3) обращения образовавшейся черной дыры;
5. максимальную скорость взаимного падения тел, определяемой выражением

$$V_r = -\frac{64 G^3 (\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2)(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{5 c^5 r^3}, \quad (5)$$

здесь r – расстояние между черными дырами.

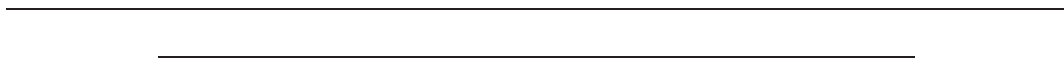
6. количество энергии, выделившейся в результате слияния черных дыр (выразить в энергиях покоя Солнца);
7. максимальную мощность излучения гравитационных волн, согласно формуле:

$$N = \frac{32 G^4 (\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2)^2 (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{5 c^5 r^5}, \quad (6)$$

8. расстояние (Δ) до источника, если безразмерная амплитуда (указанная на рис. 5, как strain) волны представляется выражением

$$h = \frac{1}{\Delta} \frac{G^2 \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{c^4 r}. \quad (7)$$

(15 баллов).



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Прямое и попятное движения небесных тел»

Решение: все планеты (классические и карликовые) и малые тела Солнечной системы совершают как прямые, так и попятные движения. Напомним, **прямым движением** небесного тела называется его движение относительно звезд, с запада на восток. Соответственно, **попятным** – движение относительно звезд с востока на запад. Смена характера движения, как правило, сопровождается феноменом, когда данное тело описывает на небосводе петлеобразный трек видимого движения – **петлю попятного движения**.

Петлеобразное движение данных тел является следствием сложения орбитальных движений Земли и планет, точнее выражаясь, различием гелиоцентрических скоростей данных тел и изменением относительной скорости данных тел в системе отсчета, связанной с Землей. Поясним это на примере Земли и Марса (см. рис. 6).

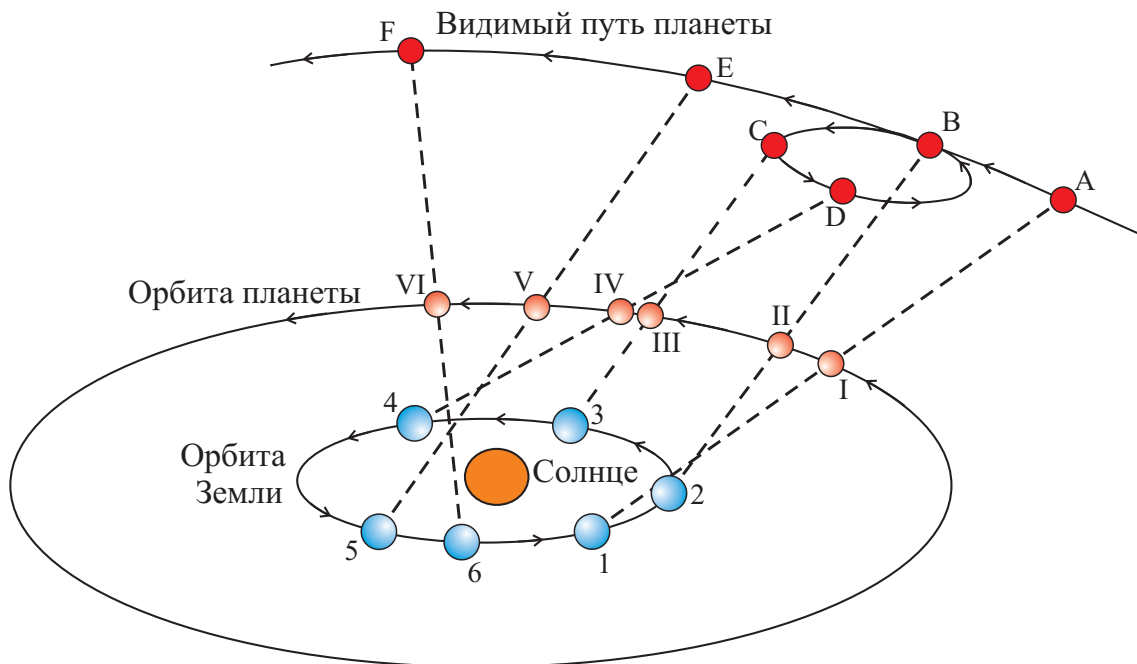


Рис. 6: к объяснению петлеобразного движения верхней планеты (Марса).

Пусть в момент времени t_1 Земля находилась в точке 1 своей орбиты, а Марс – в точке I своей орбиты. При этом Марс для земного наблюдателя проецировался на небесную сферу в точку A. Поскольку у Земли орбитальная скорость выше, то Земля догоняет Марс и в момент времени t_2 , оказывается в точке 2, в это время Марс – в точке II, и проецируется в точку B, при этом наблюдается уменьшение собственного движения планеты. Земля обгоняет Марс и в момент времени t_3 уже находится в точке 3, а Марс в то же момент – в точке III, при этом становится заметно, как верхняя планета начинает попятное движение. Земля убегает вперед по своей орбите, и в момент времени t_4 находится в точке 4, при этом Марс – в точке IV, и проецируется

Галактика	α	δ	m_v, m	D , кпк	Примечания
Млечный Путь	–	–	-26.74	0	Наша галактика, в нее входит Солнечная система. Большинство ее объектов, видны невооруженным глазом на небе
Большое Магелланово Облако	05 ^h 23 ^m 34 ^s	-69°45'22"	+0.9	50	Видна только в южном полушарии. Самая яркая туманность на небе
Малое Магелланово Облако (NGC 292)	00 ^h 52 ^m 38 ^s	-72°48'00"	+2.7	60	Видна только в южном полушарии
Галактика Андромеды (M31, NGC 224)	00 ^h 42 ^m 44 ^s	+41°16'09"	+3.44	772	также называется Туманностью Андромеды. Находится в созвездии Андромеды
Галактика Треугольника (M33, NGC 598)	01 ^h 33 ^m 51 ^s	30°39'36"	+5.7	900	Наблюдение невооруженным глазом очень затруднено, но возможно.

Таблица 1: галактики, видимые с поверхности Земли среднестатистическим невооруженным глазом.

в точку D , демонстрируя явно выраженное попятное движение. Земля все больше удаляется от Красной планеты, двигаясь по своей орбите, и в момент времени t_5 находится в точке B , здесь уже направления орбитальных скоростей планет почти противоположны и потому, Марс здесь демонстрирует прямое движение пребывая в точке V и проецируясь в точку E . Та же тенденция просматривается и в момент времени t_6 , когда Земля находится в точке B , Марс – в VI и при этом проецируется в точку F .

Ответ: все планеты (классические и карликовые) и малые тела Солнечной системы. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 2. «Галактики, видимые невооруженным глазом»

Решение: невооруженным среднестатистическим глазом можно наблюдать галактики, представленные в таблице 1.

Следует сделать замечание, что некоторым наблюдателям звездного неба с особо острым зрением и в исключительно благоприятных условиях удавалось рассмотреть невооруженным глазом галактики M81 в Большой Медведице (+7.0^m, 3.68 Мпк) и M33 в созвездии Гидра (+7.5^m, 4.60 Мпк). Однако, это единичные случаи и для невооруженного среднестатистического глаза данные объекты все-таки недоступны, именно поэтому мы не включаем их в искомый список.

Ответ: пять галактик, представленных в таблице 1. ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 3. «Транзит самолета и солнечное затмение»

<u>Дано:</u> $\ell = 45$ м.	<u>Решение:</u> Прежде всего, необходимо определить угловой масштаб (μ_a) фотографии. Проще всего его вычислить, опираясь на известные угловые масштабы Солнца. Как известно, средний угловой диаметр Солнца составляет ($D''_{\odot} = 32'$). Тогда масштаб представляется в виде:
<u>Найти:</u> $\Delta - ?$	

$$\mu_a = \frac{D''_{\odot}}{d_{\odot}}, \quad (8)$$

где d_{\odot} – диаметр Солнца, измеренный по фотографии в (мм). К сожалению, диск Солнца на фотографии 1 виден только частично, и потому для определения d_{\odot} следует воспользоваться следующей методикой.

Рассмотрим круг радиуса R и круговой сегмент $ACBDA$ (аналогичная часть диска Солнца отчетливо видна на фотографии), с высотой h и основанием $AB = 2a$ (см. рис. 7). Из треугольника $\triangle ADO$ по теореме Пифагора следует, что

$$R^2 = a^2 + (R - h)^2, \Rightarrow R = \frac{a^2 + h^2}{2h}.$$

Т.о. для определения радиуса круга необходимо знать высоту h кругового сегмента и половину его основания – a . Для сегмен-

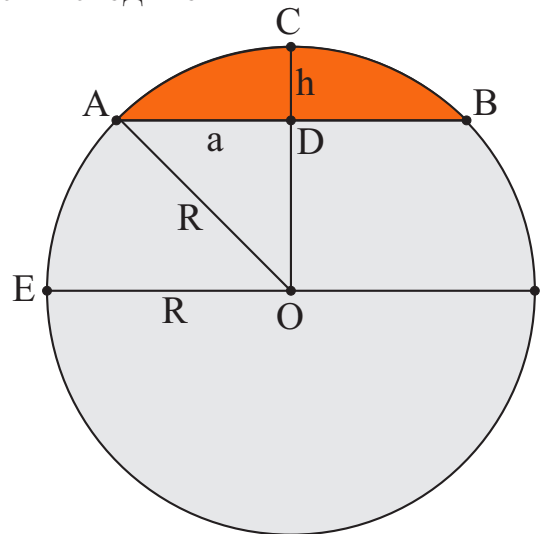


Рис. 7: к определению радиуса круга.

та видимого диска Солнца по фотографии 1 определяем соответствующие значения $2a_{\odot} = 112$ мм, $h_{\odot} = 35$ мм (ваши значения могут отличаться от представленных, поскольку Вы могли работать с данной фотографией при ином увеличении), откуда следует радиус Солнца $R_{\odot} = 62.5$ мм и диаметр – $d_{\odot} = 125$ мм. В итоге угловой масштаб фотографии есть $\mu_a = 0.256'/\text{мм}$.

Далее определим линейный размер самолета по фотографии – $d_p = 20$ мм, следовательно, угловая длина его корпуса есть $\ell'' = d_p \cdot \mu_a = 5.12'$.

Поскольку, корпус самолета лежит в картинной плоскости, то легко определить расстояние до самолета. Нетрудно убедиться в том, что справедливо следующее соотношение:

$$\operatorname{tg} \frac{\ell''}{2} = \frac{\ell/2}{\Delta}, \Rightarrow \Delta = \frac{\ell}{2 \operatorname{tg} \frac{\ell''}{2}} = 30.2 \text{ км.}$$

Ответ: $\Delta = \frac{\ell}{2 \operatorname{tg} \frac{\ell''}{2}} = 30.2$ км. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Высота полета и время транзита самолета»Дано:

$$h_{\odot} = 15^{\circ},$$

$$V = 840 \text{ км/ч.}$$

Найти:

$$H, \tau - ?$$

Решение:

а) для определения линейной высоты самолета над горизонтом рассмотрим плоский треугольник $\triangle OCP$, лежащий в плоскости вертикала самолета, вершины которого совпадают с центром Земли (C), с точкой, где находился автор фотографии (O) и самолет (P , см. рис. 8).

Для данного треугольника по теореме косинусов можно легко определить сторону CP :

$$CP = \sqrt{OC^2 + OP^2 - 2 \cdot OC \cdot OP \cos(90^{\circ} + h_{\oplus})} =$$

$$= \sqrt{\mathfrak{R}_{\oplus}^2 + \Delta^2 - 2 \mathfrak{R}_{\oplus} \Delta \cos(90^{\circ} + h_{\oplus})} = \mathfrak{R}_{\oplus} \times$$

$$\times \sqrt{1 + 2\chi \sin h_{\oplus} + \chi^2}, \text{ где } \chi = \frac{\Delta}{\mathfrak{R}_{\oplus}} \ll 1. \quad (9)$$

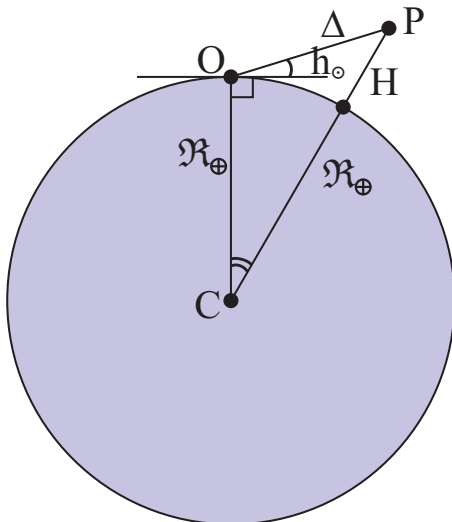


Рис. 8: к определению линейной высоты самолета.

Воспользуемся биномиальным приближением вида:

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x, \text{ при } x \ll 1.$$

В результате (9) представляется в виде:

$$CP = \mathfrak{R}_{\oplus} \left(1 + \chi \sin h_{\oplus} + \frac{1}{2} \chi^2 \right) \quad (10)$$

Иначе, согласно рис. 8, имеем

$$CP = \mathfrak{R}_{\oplus} + H,$$

Из сопоставления последнего выражения и формулы (10) в результате получаем

$$H = \mathfrak{R}_{\oplus} \left(\chi \sin h_{\oplus} + \frac{1}{2} \chi^2 \right) = 7.9 \text{ км}, \quad (11)$$

где мы учли, что $\mathfrak{R}_{\oplus} = 6371 \text{ км}$ – средний радиус Земли, $\chi = 4.74 \cdot 10^{-3}$.

б) Определить точное время транзита самолета по диску Луны затруднительно, поскольку видимость ее диска ограничена облачными массами, и потому невозможно точно определить длину хорды, по которой двигался самолет. Далее учтем, что угловой диаметр Луны ($D''_{\text{л}})$ приблизительно равен угловому диаметру ($D''_{\text{с}})$ Солнца. Рассмотрим частный случай – движение самолета по диаметру диска Луны. Тогда расстояние, которое должен пройти самолет, чтобы пересечь диск Луны, с точки зрения наблюдателя (автора

фотографии) есть $L = 2\Delta \operatorname{tg}(D''_{\zeta} / 2) \approx \Delta \left(D''_{\zeta} / 3438' \right) = 0.281$ км. Следовательно, максимально возможное время транзита составит

$$\tau_{\max} = \frac{L}{V} = \frac{\Delta}{V} \left(\frac{D''_{\zeta}}{3438'} \right) = 1.2 \text{ с.}$$

Реальное время транзита $\tau \leq \tau_{\max}$.

Ответ: а) $H = 7.9$ км; б) $\tau \leq 1.2$ с. ($S_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Покрывание Луной звезд, видимых невооруженным глазом»

Решение: за один сидерический месяц ($T_{\zeta} = 27.32$ сут) Луна совершает один полный оборот вокруг Земли относительно звезд. Следовательно, своим телом Луна заметает на звездном небе полосу шириной, равной угловому диаметру Луны – $D''_{\zeta} = 32' = 9.31 \cdot 10^{-3}$ рад и длиной – $\ell = 2\pi$ рад. Следовательно, общая площадь небосвода, заметаемая телом Луны за сидерический месяц есть

$$S_{\zeta} = D''_{\zeta} \times \ell = 5.85 \cdot 10^{-2} \text{ срад.}$$

Поскольку звезды, согласно условию задачи, распределены равномерно, то отношение количества звезд, покрываемых телом Луны ($N_{\text{ecl}}^{(1)}$), к общему количеству звезд (N_{tot}) будет равно отношению площадей S_{ζ} к площади всей небесной сферы:

$$S_{\text{tot}} = 4\pi \text{ срад.}$$

Следовательно,

$$\frac{N_{\text{ecl}}^{(1)}}{N_{\text{tot}}} = \frac{S_{\zeta}}{S_{\text{tot}}}, \Rightarrow N_{\text{ecl}}^{(1)} = N_{\text{tot}} \left(\frac{S_{\zeta}}{S_{\text{tot}}} \right) \approx 28.$$

При этом частоту покрытия телом Луны подобных звезд можно вычислить как

$$\nu_{\text{ecl}} = \frac{N_{\text{ecl}}^{(1)}}{T_{\zeta}} \approx 1.0 \text{ зв./сут.}$$

Т.о. покрытие Луной таких звезд должно происходить достаточно часто.

За 18.6 лет узлы орбиты Луны, а следовательно, и сама орбита сделает один полный оборот по эклиптике. Следовательно, за большой промежуток времени, например, 558 лет (что эквивалентно 30×18.6 лет), орбита Луны совершит множество (30) оборотов по эклиптике, при этом побывает фактически в каждой точке полосы небесной сферы, в центре которой находится эклиптика и ширина которой $2 \cdot i_{\zeta} = 10^{\circ} 12'$. Угловую площадь данной полосы следует вычислить посредством вычитания из площади (S_{tot}) всей сферы

площади (S_{sec}) двух одинаковых шаровых секторов с углом раствора $90^\circ - i_\zeta$. Тогда

$$S_{\text{belt}} = S_{\text{tot}} - 2 S_{\text{sec}} = 4\pi - 2 \times 2\pi(1 - \cos(90^\circ - i_\zeta)) = 4\pi \sin i_\zeta = 1.128 \text{ срад.}$$

Аналогично рассуждая, можно определить максимальное количество таких звезд, которые может покрыть Луна за большой промежуток времени:

$$\frac{N_{\text{ecl}}^{(2)}}{N_{\text{tot}}} = \frac{S_{\text{belt}}}{S_{\text{tot}}}, \Rightarrow N_{\text{ecl}}^{(2)} = N_{\text{tot}} \left(\frac{S_{\text{belt}}}{S_{\text{tot}}} \right) \approx 539.$$

Ответ: $N_{\text{ecl}}^{(1)} = 28$, $\nu_{\text{ecl}} \approx 1.0$ зв./сут, $N_{\text{ecl}}^{(2)} \approx 539$. ($\$_{\text{max}} = 4$ балла).

Задача № 6. «Нетрадиционный способ использования лупы»

Дано:

$$\Gamma_0 = 6^\times, \\ d_0 = 25 \\ \text{см.}$$

Найти:

$$\Gamma, L - ?$$

Решение:

Необходимо определить угловое увеличение лупы, когда предмет находится за фокусом лупы и получается его действительное перевернутое изображение:

$$\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (12)$$

здесь α , β – углы, под которыми виден данный предмет с помощью невооруженного глаза на расстоянии d_0 и линзы соответственно, см. рис. 9. Далее рассмотрим ход световых лучей в оптической системе «лупа-глаз» (см. рис. 9). Для прямоугольного треугольника $\Delta A_1 O_1 B_2$ можно записать

$$\text{tg } \alpha \approx \alpha = \frac{A_1 B_2}{A_1 O_1} = \frac{h}{d_0}, \quad \text{т.к. } h \ll d_0.$$

Аналогично, для прямоугольного треугольника $\Delta A_1 O_1 B_1$:

$$\text{tg } \beta \approx \beta = \frac{A_1 B_1}{A_1 O_1} = \frac{H}{d_0}, \quad \text{т.к. } H \ll d_0.$$

Треугольники ΔABO и $\Delta A_1 B_1 O$ являются подобными, следовательно, справедливы следующее соотношение:

$$\frac{h}{H} = \frac{a}{b}, \Rightarrow H = h \left(\frac{b}{a} \right).$$

Далее воспользуемся формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \Rightarrow a = \frac{fb}{b-f}. \quad (13)$$

В итоге угловое увеличение лупы в нетрадиционном способе использования есть:

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{b-f}{f} = \frac{L-f-d_0}{f} = \frac{L}{f} - \Gamma_0 = \Gamma_0 \left(\frac{L}{d_0} - 1 \right) - \frac{L}{d_0}. \quad (14)$$

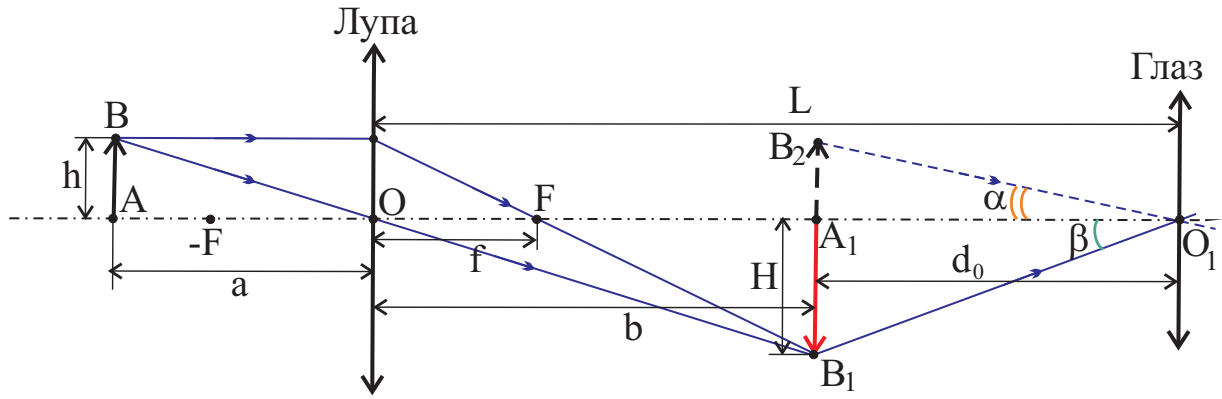


Рис. 9: к определению увеличения (Γ) лупы при ее нетрадиционном способе использования.

Определим условие, при котором с помощью лупы, нетрадиционным способом можно добиться большего увеличения чем при традиционном:

$$\Gamma > \Gamma_0, \Rightarrow \frac{L}{f} > 2\Gamma_0, \Rightarrow L > 2(f + d_0), \text{ или } \Gamma_0 > \frac{L}{L - 2d_0}. \quad (15)$$

Для лупы с $\Gamma_0 = 6\times$ фокусное расстояние линзы составляет $f = d_0/(\Gamma_0 - 1) = 5$ см. Тогда $L > 0.6$ м или 60 см, чтобы условие (15) выполнялось.

Ответ: $\Gamma = \frac{L-f-d_0}{f} = \Gamma_0 \left(\frac{L}{d_0} - 1 \right) - \frac{L}{d_0}$; условие $L > 2(f + d_0)$, или $\Gamma_0 > \frac{L}{L-2d_0}$; $L > 0.6$ м. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Ближайшие квадратуры Марса»

Дано:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\odot} &= 3396 \text{ км,} \\ a_{\oplus} &= 1.00 \text{ а.е.,} \\ T_{\oplus} &= 1 \text{ год.} \end{aligned}$$

Найти:

$$\begin{aligned} D''_{\odot}, m_V - ? \\ \text{даты} - ? \end{aligned}$$

Решение:

Как известно, **квадратурой** называется конфигурация верхней планеты, при которой она отстоит от Солнца на 90° . Если светило при этом находится к востоку от Солнца (см. рис. 10, точка $K_в$), конфигурация называется **восточной квадратурой**, к западу – **западной квадратурой** (см. рис. 10, точка $K_з$). Для определения искомых величин, необходимо знать геоцентрическое расстояние Марса в квадратуре – Δ_k и угол α между радиусами-векторами

планет, проведенными из центра Солнца (см. рис. 10). Из треугольника $\triangle SEK_з$ следует, что

$$\Delta_k = \sqrt{a_{\odot}^2 - a_{\oplus}^2}, \quad \alpha = \arccos \left[\frac{a_{\oplus}}{a_{\odot}} \right], \quad (16)$$

здесь a_{\odot} – радиус орбиты Марса. Последняя величина является неизвестной. Однако, ее можно определить, если рассмотреть положение Марса в **противостоянии** – конфигурации верхней планеты, при которой она отстоит от Солнца на 180° для земного наблюдателя. Именно в данной конфигурации

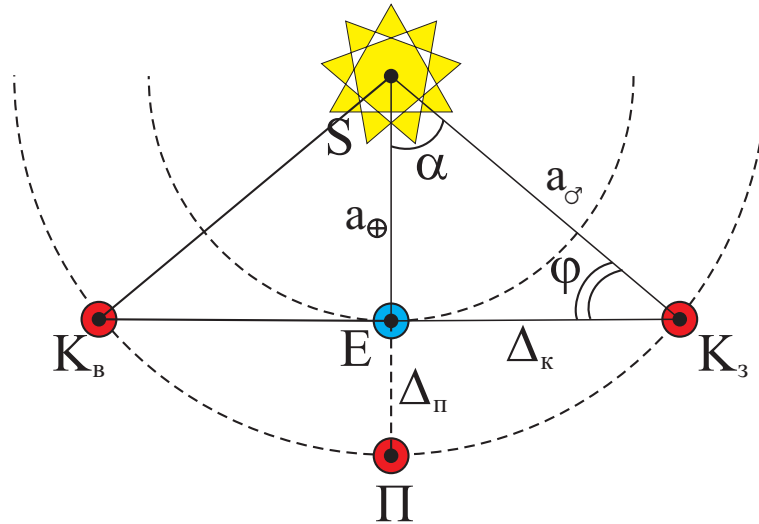


Рис. 10: к определению квадратур и искомым величин.

планета ближе всего подходит к Земле и видна под наибольшим углом. Этой ситуации на рис. 2 отвечает образ Красной планеты, соответствующий 22 мая 2016 года. Угловой диаметр планеты в конфигурации противостояния определяется посредством геоцентрического расстояния ($\Delta_{\text{п}}$) планеты:

$$D''_{\text{о max}} = 206265'' \left(\frac{2 \mathfrak{R}_{\text{о}}}{\Delta_{\text{п}}} \right), \Rightarrow \Delta_{\text{п}} = 206265'' \left(\frac{2 \mathfrak{R}_{\text{о}}}{D''_{\text{о max}}} \right) = 0.51 \text{ а.е.}$$

Следовательно, радиус орбиты Красной планеты, а также $\Delta_{\text{к}}$ и угол α соответственно равны

$$a_{\text{о}} = a_{\oplus} + \Delta_{\text{п}} = 1.51 \text{ а.е.}, \quad \Delta_{\text{к}} = 1.13 \text{ а.е.}, \quad \alpha = 48.5^{\circ}, \quad (17)$$

Тогда можно определить угловой диаметр ($D''_{\text{о}}$) планеты в квадратуре:

$$D''_{\text{о}} = 206265'' \left(\frac{2 \mathfrak{R}_{\text{о}}}{\Delta_{\text{к}}} \right) = D''_{\text{о max}} \left(\frac{\Delta_{\text{п}}}{\Delta_{\text{к}}} \right) = 8.3'', \quad (18)$$

а также видимую звездную величину (с использованием формулы Погсона, закона обратных квадратов для освещенности (E), фазы планеты – $\Phi = (1 + \cos \varphi)/2$ и видимой звездной величины в противостоянии – $m_{\text{V}}^{\text{п}} = -2.1^{\text{m}}$):

$$m_{\text{V}} - m_{\text{V}}^{\text{п}} = -2.5 \lg \left(\frac{E_{\text{к}}}{E_{\text{п}}} \right) = 2.5 \lg \left[\frac{1}{\Phi} \left(\frac{\Delta_{\text{к}}}{\Delta_{\text{п}}} \right)^2 \right] = 5 \lg \left[\frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \varphi)/2}} \left(\frac{\Delta_{\text{к}}}{\Delta_{\text{п}}} \right) \right],$$

$$m_{\text{V}} = m_{\text{V}}^{\text{п}} + 5 \lg \left(\frac{1}{\sqrt{(1 + \sin \alpha)/2}} \frac{\Delta_{\text{к}}}{\Delta_{\text{п}}} \right) \approx -0.2^{\text{m}}, \quad \text{где } \varphi = 90^{\circ} - \alpha. \quad (19)$$

Полученные значения указывают, что западной квадратуре Марса соответствует образ февраля 2016 года, а восточной квадратуре – образ сентября или

октября 2016 года³. Оценим даты данных событий. Для этого воспользуемся уравнением синодического движения для верхней планеты:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\text{Марс}}}, \Rightarrow S = \frac{T_{\oplus} T_{\text{Марс}}}{T_{\oplus} - T_{\text{Марс}}},$$

здесь $T_{\oplus}, T_{\text{Марс}}$ – сидерические периоды обращения Земли и Марса вокруг Солнца. Для определения $T_{\text{Марс}}$ воспользуемся третьим законом Кеплера:

$$\left(\frac{T_{\text{Марс}}}{T_{\oplus}}\right)^2 = \left(\frac{a_{\text{Марс}}}{a_{\oplus}}\right)^3, \Rightarrow T_{\text{Марс}} = T_{\oplus} \left(\frac{a_{\text{Марс}}}{a_{\oplus}}\right)^{3/2} = 1.856 \text{ лет.}$$

В результате $S = 2.17$ года. Время, отделяющее фазы противостояния и квадратуры, есть

$$\tau = S \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right) \approx 107 \text{ сут.}$$

В итоге приблизительная дата западной квадратуры Марса – 5.02.2016 года, а восточной квадратуры – 6.09.2016 года.

Ответ: приблизительная дата западной квадратуры Марса – 5.02.2016 года, восточной квадратуры – 6.09.2016 года; $m_V \approx -0.2^m$, $D''_{\text{Марс}} = 8.3''$. (6 баллов).

Задача № 8. «Частота двойных транзитов Меркурия и Венеры»

Дано:

$$\begin{aligned} T_{\text{Мер}} &= 87.9691 \text{ сут,} \\ T_{\text{Вен}} &= 224.6980 \text{ сут,} \\ T_{\oplus} &= 365.2564 \text{ сут,} \\ a_{\oplus} &= 1.000 \text{ а.е.} \end{aligned}$$

Найти:

$$S_{\text{тр}}, \tau_{\text{max}} - ?$$

Решение:

если плоскости орбит Меркурия и Венеры совпадали бы с плоскостью орбиты Земли, а сами орбиты были круговыми, то транзиты данных планет по диску Солнца были бы центральными, т.е. трек видимого движения планеты проходил бы через центр видимого диска Солнца. Определим продолжительность (τ_p) такого транзита для нижней планеты P (см. рис. 11).

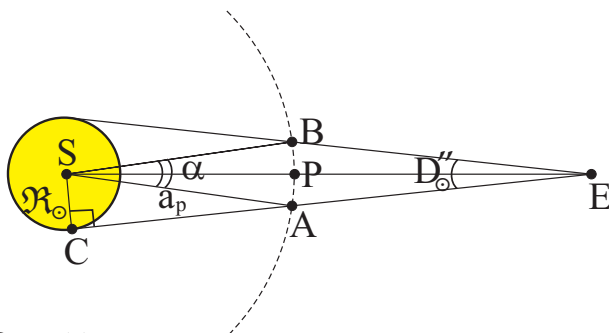


Рис. 11: к определению времени транзита нижней планеты.

$$\tau_p = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\omega_{\text{rel}}} = \frac{\alpha}{\omega_{\text{rel}}},$$

здесь a_p – радиус орбиты планеты, α – угол раствора дуги $\overset{\frown}{AB}$ орбиты нижней планеты, пребывая в пределах которой, с Земли наблюдается транзит данной планеты; ω_{rel} – угловая скорость относительного движения

нижней планеты. Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ACS$, для него имеем

³Отметим, что некоторое несоответствие полученного значения звездной величины и действительной объясняется эллиптичностью орбит планет и конечным наклоном орбиты Марса к плоскости эклиптики, что приводит к несколько иному значению Δ_K и угла α .

$$\sin \angle CAS = \sin \left(\frac{\alpha + D''_{\odot}}{2} \right) = \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_p}, \Rightarrow \alpha = 2 \arcsin \left(\frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_p} \right) - D''_{\odot}, \quad (20)$$

здесь $\mathfrak{R}_{\odot} = 695500$ км = $4.649 \cdot 10^{-3}$ а.е. – радиус Солнца; $D''_{\odot} = 32'$ – его угловой диаметр. Относительная угловая скорость запишется в виде:

$$\omega_{\text{rel}} = \omega_p - \omega_{\oplus} = 2\pi \left(\frac{T_{\oplus} - T_p}{T_{\oplus} T_p} \right) = \frac{2\pi}{S_p},$$

здесь T_p, S_p – сидерический и синодический период видимого движения нижней планеты. В результате продолжительность центрального транзита есть

$$\tau_p = \frac{S_p}{2\pi} \left[2 \arcsin \left(\frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_p} \right) - D''_{\odot} \right]. \quad (21)$$

Учитывая далее, что

$$S_{\text{♀}} = \frac{T_{\oplus} T_{\text{♀}}}{T_{\oplus} - T_{\text{♀}}} = 115.877 \text{ сут}, \quad S_{\text{♁}} = \frac{T_{\oplus} T_{\text{♁}}}{T_{\oplus} - T_{\text{♁}}} = 583.902 \text{ сут},$$

а большие полуоси планет определяются третьим законом Кеплера

$$a_{\text{♀}} = a_{\oplus} \left(\frac{T_{\text{♀}}}{T_{\oplus}} \right)^{2/3} = 0.387 \text{ а.е.}, \quad a_{\text{♁}} = a_{\oplus} \left(\frac{T_{\text{♁}}}{T_{\oplus}} \right)^{2/3} = 0.723 \text{ а.е.}$$

в результате получаем продолжительности центральных транзитов Меркурия и Венеры:

$$\tau_{\text{♀}} = 0.271 \text{ сут} = 6 \text{ час } 31 \text{ мин}, \quad \tau_{\text{♁}} = 0.330 \text{ сут} = 7 \text{ час } 55 \text{ мин}. \quad (22)$$

Очевидно, что максимальная продолжительность транзита, не может быть более $\tau_{\text{♀}}$, следовательно $\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{♀}} = 6 \text{ час } 31 \text{ мин}$ (что соответствует ситуации, когда обе планеты одновременно "заходят" на диск Солнца).

Далее определим синодический период (S_{tr}) данного явления. Для этого заметим, что все планеты движутся относительно Солнца в прямом направлении и во время транзита Меркурий, Венера и Земля должны оказаться на одной прямой. Поскольку при движении по круговой орбите их угол оборота (φ) меняется пропорционально прошедшему времени, то можно составить следующие два уравнения, отвечающие промежутку S_{tr} :

$$\varphi_{\text{♀}} - \varphi_{\oplus} = 2\pi \ell, \Rightarrow S_{\text{tr}} \left(\frac{2\pi}{T_{\text{♀}}} - \frac{2\pi}{T_{\oplus}} \right) = 2\pi \ell, \Rightarrow S_{\text{tr}} = \ell S_{\text{♀}}, \quad (23)$$

$$\varphi_{\text{♁}} - \varphi_{\oplus} = 2\pi m, \Rightarrow S_{\text{tr}} \left(\frac{2\pi}{T_{\text{♁}}} - \frac{2\pi}{T_{\oplus}} \right) = 2\pi m, \Rightarrow S_{\text{tr}} = m S_{\text{♁}}, \Rightarrow (24)$$

$$\frac{S_{\text{♁}}}{S_{\text{♀}}} = \frac{\ell}{m}. \quad (25)$$

где ℓ, m – натуральные числа, подлежащие определению. По сути, необходимо найти наименьшее общее кратное синодических периодов. При этом важно понимать до какого знака после запятой следует округлять величины $S_{\text{♀}}, S_{\text{♁}}$. Учитывая, что максимальная продолжительность двойного транзита порядка часа, следует удерживать знаки в данных величинах с точностью до минуты, что соответствует 0.001 сут, следовательно $S_{\text{♀}}/S_{\text{♁}} = 5.040$ необходимо представить отношением целых чисел. Очевидно, что

$$S_{\text{♀}}/S_{\text{♁}} = 5.040 = \frac{126}{25}, \Rightarrow S_{\text{тр}} = 25 S_{\text{♀}} = 39.967 \text{ лет.}$$

При вычислении последнего мы использовали среднюю продолжительность календарного (григорианского) года ($\bar{Y}_G = 365.2425$ сут). Т.о. 1 раз в 39.967 лет наблюдался бы двойной транзит нижних планет в указанных условиях.

Ответ: $\tau_{\text{max}} = 6$ час 31 мин; 1 раз в 39.967 лет наблюдался бы двойной транзит нижних планет в указанных условиях. (7 баллов).

Задача № 9. «Восход Луны в полнолуние»

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$m_V^{(0)} = -12.7^m,$ $P = 0.75.$	Для оценки высоты центра видимого диска Луны определим угловой масштаб (μ_a) фотографии 3. Учтем, что средний угловой диаметр видимого диска Луны равен
<u>Найти:</u> $h_{\zeta}, m_V - ?$	$\bar{D}_{\zeta}'' = 32'$, тогда согласно определению углового масштаба имеем

$$\mu_a = \frac{\bar{D}_{\zeta}''}{d_{\zeta}},$$

где $d_{\zeta} = 40.5$ мм – диаметр видимого диска Луны, определенный по фотографии 3. Следует отметить, что ваше значение d_{ζ} может отличаться от выше представленного, поскольку Вы могли использовать фотографию с иными размерами. В результате угловой масштаб есть

$$\mu_a = \frac{32'}{40.5 \text{ мм}} = 0.79' / \text{мм.}$$

Далее опередем уровень горизонта на фотографии. Заметим, что фотография получена в городских условиях, в массиве многоэтажных домов. Вероятнее всего, съемка также велась с не первого этажа высотки. Примем за уровень горизонта уровень крыши самой нижней многоэтажки, "расположенной под деревом". Тогда линейная высота центра видимого диска Луны составит $H = 78$ мм, а угловая высота светила будет равна

$$h_{\zeta} = \mu_a H = 61.6' \approx 1.0^\circ.$$

Следовательно, зенитное расстояние Луны будет равно $z_{\zeta} = 90^{\circ} - h_{\zeta} \approx 89^{\circ}$.

Согласно условию задачи, в полнолуние видимая звездная величина полного диска Луны, наблюдаемой в зените, равна $m_{\zeta}^{(0)} = -12.7^m$, что, согласно формуле (3) отвечает интенсивности $\mathcal{I}(z = 0^{\circ}) = \mathcal{I}_0 P$.

Следовательно, отношение интенсивности $\mathcal{I}(z = 0^{\circ})$ к интенсивности света $\mathcal{I}(z = 89^{\circ})$ от половины диска Луны (фаза – $\Phi = 0.5$) есть

$$\frac{\mathcal{I}(z = 0^{\circ})}{\Phi \mathcal{I}(z = 89^{\circ})} = \frac{1}{\Phi} P^{1-M(89^{\circ})} = 3.44 \cdot 10^{-4}.$$

Далее воспользуемся формулой Погсона:

$$m_V - m_{\zeta}^{(0)} = -2.5 \lg \left(\frac{\mathcal{I}(z = 0^{\circ})}{\Phi \mathcal{I}(z = 89^{\circ})} \right), \Rightarrow$$

$$m_V = m_{\zeta}^{(0)} + 2.5 \lg \left(\frac{\Phi \mathcal{I}(z = 89^{\circ})}{\mathcal{I}(z = 0^{\circ})} \right) = -12.7^m + 8.7^m = -4.0^m.$$

Ответ: $h_{\zeta} \approx 1.0^{\circ}$, $m_V = -4.0^m$. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 10. «Просветляющее покрытие для линз биноклей и телекопов»

Решение: 1) **Просветление оптики** – это процедура нанесения одного или нескольких слоев тончайших пленок (один поверх другого) на поверхность линз, (контактирующих с воздухом) оптического инструмента (бинокля, телескопа и др.). Просветление применяется для улучшения светопропускаемости оптической системы.

Просветляющее покрытие подавляет рассеяние и отражение падающего света от поверхностей оптического элемента, что приводит к повышению контраста и яркости рассматриваемых объектов в астрономический инструмент.

2) Данная процедура основана на использовании явления *интерференции света в тонких пленках* – явления интерференции, возникающей при разделении первоначального луча света на два когерентных луча, при его прохождении через тонкую пленку и последующем сложении (см. рис. 12). Луч света, проходя через пленку толщиной h , отразится дважды – от внутренней и наружной ее поверхностей. Отраженные лучи будут иметь постоянную разность фаз, пропорциональную разности их оптических путей (последняя величина постоянна и определяется толщиной h), в результате лучи становятся когерентными и будут интерферировать.

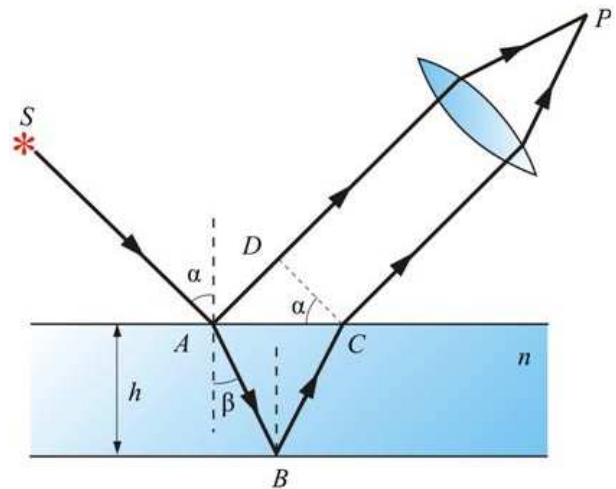


Рис. 12: к определению явления интерференции в тонких пленках (источник: <http://ens.tpu.ru/>).

3) Все современные оптические инструменты имеют просветление основных оптических элементов. Выделяют следующие виды просветления.

- *однослойное просветление оптики* – просветление оптики, при котором наносится на поверхность линз одиночная однородная тонкая пленка, предназначенная для подавления отражения световых волн определенной длины. Как будет показано ниже, толщина одиночного просветляющего слоя должна быть равна или кратна $1/4$ длины световой волны. В этом случае лучи, отраженные от ее наружной и внутренней сторон, отразятся в противофазе и при равной амплитуде погасятся вследствие интерференции – интенсивность блика станет равной нулю. Для наилучшего эффекта (уравнивания амплитуд отраженного света) показатель преломления просветляющей пленки должен равняться квадратному корню показателя преломления оптического стекла линзы. Но отражательная способность стекла, просветленного таким способом, сильно зависит от длины волны, что является основным недостатком однослойного просветления. В настоящее время однослойное просветление (главное его преимущество – дешевизна) используется в бюджетных оптических узлах и в лазерной оптике, рассчитанной на работу в узком спектральном диапазоне.
- *многослойное просветляющее покрытие* представляет собой последовательность из не менее чем трех чередующихся слоев материалов с различными показателями преломления. Раннее считалось что для видимой области спектра достаточно 3-4 слоев. Современные многослойные просветляющие покрытия практически всех изготовителей имеют 6-8 слоев, и характеризуются низкими потерями на отражение во всей видимой области спектра. Основное преимущество многослойного просветления применительно к астрономической оптике – незначительная зависимость отражательной способности от длины волны в пределах видимого спектра. Отражения от поверхности линз с многослойным просветлением, вызванные отражением на спектральных границах просветленной области, имеют различные оттенки зеленого и фиолетового цвета, вплоть до очень слабых серо-зеленоватых у объективов последних годов выпуска. Но это не есть показатель качества просветляющей системы!

Возможно также *частичное* или *полное* просветление оптических элементов инструмента. Следовательно, возможны следующие варианты просветления инструментов.

частичное однослойное	частичное многослойное
полное однослойное	полное многослойное

4) Инструмент с полным многослойным просветлением является наилучшим для астрономических наблюдений. Однако, такие инструменты являются весьма дорогими.

5) Вычислим толщину однослойного покрытия линзы, чтобы лучи света, отвечающие максимальной чувствительности человеческого глаза и падающие нормально на ее поверхность, смогли пройти без отражения от поверхности. Для этого определим *разность хода* (Δ) – разность оптических путей (s_1 и s_2), прошедших лучами 1 (отраженного в точке А) и 2 (преломленного в точке А, прошедшего по ломанной ABC и вышедшего из пленки в точке С). Из рис. 12 очевидно, что

$$\Delta = s_2 - s_1 = (n(AB + BC) + \lambda/2) - (AD + \lambda/2) = \frac{2nh}{\cos \beta} - 2h \operatorname{tg} \beta \sin \alpha,$$

$$\Delta = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha},$$

здесь мы использовали закон преломления светового луча

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

и учли, что под пленкой расположено стекло линзы, являющееся оптически более плотной средой, поэтому при отражении волны от более плотной среды ее оптический путь дополнительно изменяется на $\lambda/2$. Чтобы два когерентных луча скопенсировали друг друга необходимо, чтобы выполнялось условие минимума интерференции:

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \Rightarrow h = \frac{\lambda}{4} \frac{(2m + 1)}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

где m – натуральное число. При $\alpha = 0^\circ$, что отвечает нормальному падению световых лучей, $n = n_c = \sqrt{n_g}$ и $\lambda = 555$ нм (отвечает максимальной чувствительности человеческого глаза) имеем

$$h = \frac{\lambda}{4} \frac{(2m + 1)}{\sqrt{n_g}}, \Rightarrow h_{\min} = \frac{\lambda}{4} \frac{1}{\sqrt{n_g}} = 100 \text{ нм} = 1.00 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Ответ: $h_{\min} = \frac{\lambda}{4} \frac{1}{\sqrt{n_g}} = 100$ нм. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11. «Продолжительность истинных солнечных суток у планет»

Решение: как известно, *истинными солнечными сутками* называется промежуток времени ($T_P^{(\odot)}$), между двумя последовательными одноименными кульминациями истинного Солнца (центра видимого диска Солнца) для наблюдателя в данной точке поверхности планеты. За начало таких

суток принимается момент нижней кульминации светила. Но следить за продолжительностью суток удобнее, периодически наблюдая Солнце в верхней кульминации. Данное определение справедливо даже для тех точек поверхности планеты, где Солнце является невосходящим светилом.

При любом положении оси вращения планеты относительно ее плоскости орбиты и, как следствие, при любом статусе истинного Солнца (является незаходящим, восходящим и заходящим или невосходящим светилом) величина $T_p^{(\odot)}$, определяется сидерическим периодом (P_p) вращения планеты вокруг своей оси и сидерическим периодом (T_p) ее обращения вокруг Солнца. Введем соответствующие угловые скорости: $\vec{\omega}_\odot$, $\vec{\omega}_P$, $\vec{\omega}_T$, модули которых есть

$$\omega_\odot = \frac{2\pi}{T_p^{(\odot)}}, \quad \omega_P = \frac{2\pi}{P_p}, \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T_p}. \quad (26)$$

Рассмотрим две системы отсчета, жестко связанные с центрами 1) Солнца – *гелиоцентрическую* (ГСО), являющуюся инерциальной) и 2) планеты – *планетоцентрическую* (ПСО), не являющуюся инерциальной. В ГСО планета вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}_P$, при этом ПСО совершает вращательное движение относительно ГСО с угловой скоростью $\vec{\omega}_T$. В результате вращения планеты все точки ее поверхности в ПСО имеют угловую скорость $\vec{\omega}_\odot$. Поскольку движение истинного Солнца является следствием указанных движений – то его угловая скорость видимого движения по небосводу есть $-\vec{\omega}_\odot$. Следовательно, можно воспользоваться законом сложения угловых скоростей:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_P &= \vec{\omega}_T + \vec{\omega}_\odot, \Rightarrow \vec{\omega}_\odot = \vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T, \Rightarrow \\ \omega_\odot &= |\vec{\omega}_\odot| = \sqrt{(\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T)^2} = \sqrt{\vec{\omega}_P^2 + \vec{\omega}_T^2 - 2\vec{\omega}_P\vec{\omega}_T}, \\ \omega_\odot &= \sqrt{\omega_P^2 + \omega_T^2 - 2\omega_P\omega_T \cos \alpha}, \end{aligned} \quad (27)$$

где α – *наклон оси вращения* – угол отклонения оси вращения небесного тела от перпендикуляра к плоскости его орбиты или что тоже самое угол между плоскостью орбиты планеты и плоскостью ее экватора. В итоге

$$T_p^{(\odot)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_P^2 + \omega_T^2 - 2\omega_P\omega_T \cos \alpha}}, \quad (28)$$

С использованием значений параметров для классических планет, представленных в таблице 2, выполнен расчет искомым величин, которые представлены в последнем столбце таблицы 2.

Из результатов следует, что величина периода вращения (P_p) планет, главным образом, определяет величину $T_p^{(\odot)}$, в случае Земли-Нептуна. И лишь

Планета	T_p , сут	P_p , сут	α , град	$T_p^{(\odot)}$, час
Меркурий	87.969	58.646	0.035	175.938
Венера	224.698	243.023	177.36	116.782
Земля	365.256	0.997	23.783	1.000
Марс	686.980	1.027	25.19	1.028
Юпитер	4332.589	0.414	3.13	0.414
Сатурн	10759.22	0.439	26.73	0.439
Уран	30685.40	0.718	97.77	0.718
Нептун	60190.03	0.665	28.32	0.665

Таблица 2: параметры планет и результаты расчета.

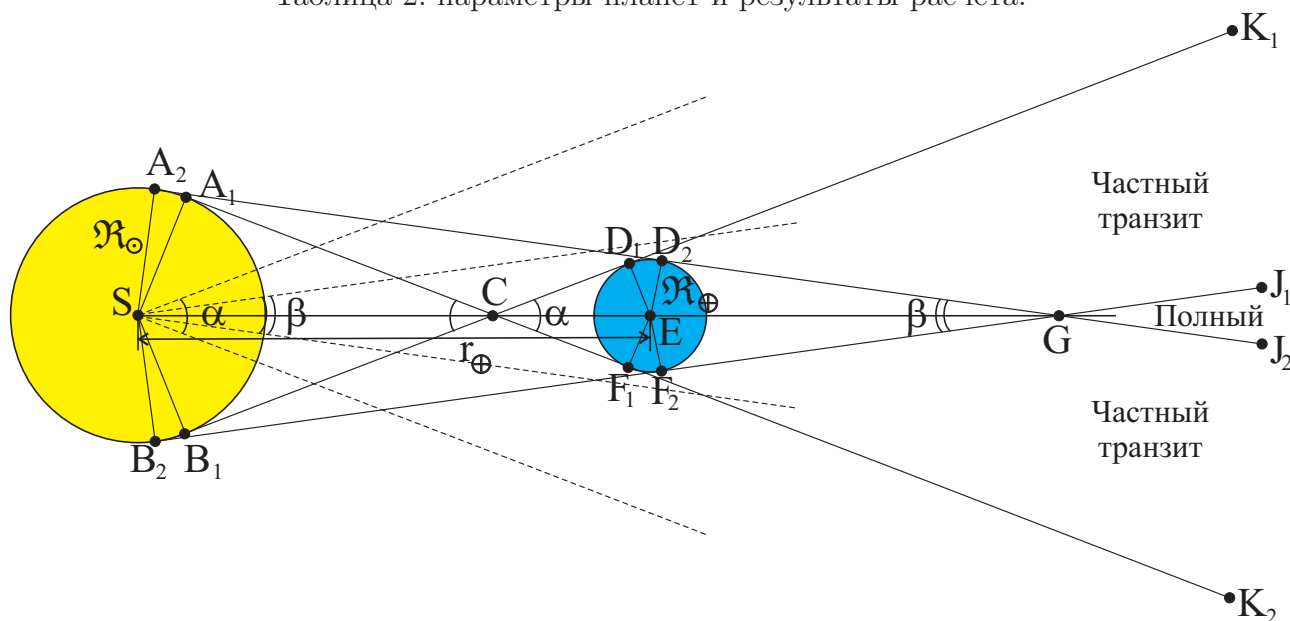


Рис. 13: к определению телесных углов полного и частного транзита Земли по диску Солнца.

только в случае Меркурия и Венеры данные значения существенно разнятся, поскольку для них T_p , P_p относительно близки по значениям. Наименьшие по продолжительности солнечные сутки наблюдаются у Юпитера (0.414 сут), а максимальные – у Меркурия (175.938 сут).

Ответ: наименьшие по продолжительности солнечные сутки наблюдаются у Юпитера (0.414 сут), а максимальные – у Меркурия (175.938 сут). ($\$_{\max} = 9$ баллов).

Задача № 12. «Транзит Земли по диску Солнца и его наблюдение»

Дано:

$$r = 10 \text{ пк.}$$

Найти:

$$\Omega_f, \Omega_p - ?$$

$$\eta, \Delta m_{\odot} - ?$$

Решение:

Рассмотрим систему «Солнце-Земля» см. рис. 13. Предположим, что гипотетический наблюдатель ведет наблюдения Солнца с расстояния, много большего размеров указанной системы. Для того чтобы он мог наблюдать полный транзит Земли по диску Солнца необходимо, чтобы Земля оказалась "зажатой" между лучами J_1GB_2 и J_2GA_2 , а сам наблюдатель

оказался внутри телесного угла с углом раствора $\angle J_1 G J_2 = \beta$.

Для наблюдения частного транзита Земли по диску Солнца необходимо, чтобы Земля была "зажата" между лучами $K_1 C B_1$ и $J_1 G B_2$ или $K_2 C A_1$ и $J_2 G B_2$, а сам наблюдатель находился внутри телесного угла с углами раствора $\alpha - \beta$. Определим указанные углы. Для определения угла β рассмотрим треугольники $\triangle G S A_2$ и $\triangle G E D_2$, которые, очевидно, подобны друг другу (например, по двум одинаковым углам). Из подобия треугольников следует, что

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{ED_2}{EG} = \frac{SA_2}{SG}, \Rightarrow \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{x} = \frac{\mathfrak{R}_\odot}{x + r_\oplus}, \Rightarrow \gamma = \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\odot} = \frac{x}{x + r_\oplus}, \Rightarrow$$

$$x = \frac{\gamma r_\oplus}{1 - \gamma}, \Rightarrow \sin \frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2} = \frac{\mathfrak{R}_\odot}{r_\oplus} (1 - \gamma). \quad (29)$$

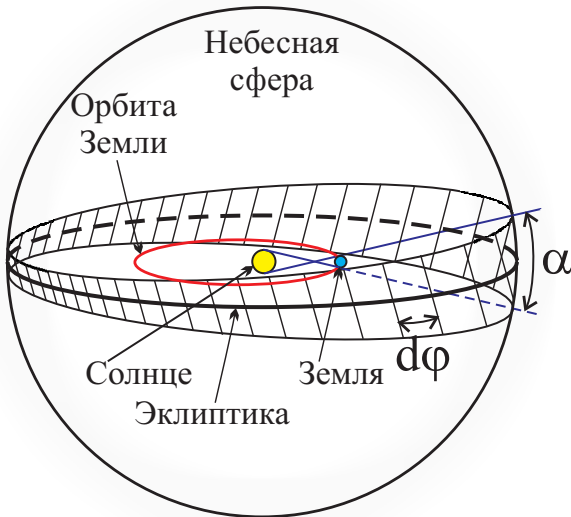


Рис. 14: к определению области на небесной сфере, с которой можно наблюдать (частный или полный) транзит Земли по диску Солнца.

где $\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км, $\mathfrak{R}_\odot = 695500$ км – радиусы Земли и Солнца соответственно ($\gamma = 9.16 \cdot 10^{-3}$), r_\oplus – гелиоцентрическое расстояние Земли; $EG = x$. Здесь учтено также, что угол β является малым. Учитывая, что уравнение эллипса орбиты Земли есть

$$r_\oplus = \frac{a_\oplus (1 - \varepsilon_\oplus^2)}{1 + \varepsilon_\oplus \cos \varphi}. \quad (30)$$

здесь $a_\oplus = 149597870$ км, $\varepsilon_\oplus = 0.017$ – большая полуось и эксцентриситет орбиты Земли; φ – полярный угол Земли, отсчитываемый от перигелия. В итоге угол β представляется в виде:

$$\beta = 2 \frac{\mathfrak{R}_\odot}{a_\oplus} \frac{(1 - \gamma)}{(1 - \varepsilon_\oplus^2)} (1 + \varepsilon_\oplus \cos \varphi). \quad (31)$$

Т.о. угол β зависит от параметров орбиты a_\oplus , ε_\oplus и положения планеты на орбите.

Аналогично рассуждая для подобных треугольников $\triangle S A_1 C$ и $\triangle C F_1 E$, можем записать условие подобия:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{SA_1}{SC} = \frac{EF_1}{EC}, \Rightarrow \frac{\mathfrak{R}_\odot}{r_\oplus - y} = \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{y}, \Rightarrow$$

$$\frac{y}{r_\oplus - y} = \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\odot} = \gamma, \Rightarrow y = \frac{\gamma r_\oplus}{1 + \gamma}, \Rightarrow$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} = \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{r_{\oplus}}(1 + \gamma).$$

$$\alpha = 2 \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} \frac{(1 + \gamma)}{(1 - \varepsilon_{\oplus}^2)} (1 + \varepsilon_{\oplus} \cos \varphi). \quad (32)$$

Область полного транзита Земли по диску Солнца представляет узкую полосу переменной ширины β , которой соответствует телесный угол Ω_f (см. рис. 14). Телесный угол $d\Omega_f$, соответствующий малой площадке ширины $d\varphi$ и высотой β есть величина

$$d\Omega_f = \beta d\varphi = 2 \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} \frac{(1 - \gamma)}{(1 - \varepsilon_{\oplus}^2)} (1 + \varepsilon_{\oplus} \cos \varphi) d\varphi.$$

Очевидно, что полный телесный угол представляется в виде:

$$\begin{aligned} \Omega_f &= \int d\Omega_f = 2 \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} \frac{(1 - \gamma)}{(1 - \varepsilon_{\oplus}^2)} \int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon_{\oplus} \cos \varphi) d\varphi = \\ &= 2 \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} \frac{(1 - \gamma)}{(1 - \varepsilon_{\oplus}^2)} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi + \varepsilon_{\oplus} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right]. \\ \Omega_f &= 4\pi \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} \frac{(1 - \gamma)}{(1 - \varepsilon_{\oplus}^2)} = 5.790 \cdot 10^{-2} \text{ срад} = 190.09 \text{ кв. град.} \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично рассуждая, можно показать, что телесный угол, отвечающий какому-либо транзиту Земли (полному или частному), есть

$$\Omega_t = 4\pi \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} \frac{(1 + \gamma)}{(1 - \varepsilon_{\oplus}^2)}. \quad (34)$$

Тогда телесный угол, отвечающий лишь частному транзиту Земли, представляется в виде:

$$\Omega_p = \Omega_t - \Omega_f = 8\pi \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} \frac{\gamma}{(1 - \varepsilon_{\oplus}^2)} = 1.07 \cdot 10^{-3} \text{ срад} = 3.51 \text{ кв. град.} \quad (35)$$

При наблюдении Солнца (вне транзита) с какой-либо удаленной точки пространства, например с расстояния 10 пк, поток (Φ_0) излучения, приходящий к приемнику излучения, равен произведению силы света I и телесного угла Ω_{\odot} , под которым наблюдается Солнце с данной точки:

$$\Phi_0 = I \Omega_{\odot} = I \frac{\pi \mathfrak{R}_{\odot}^2}{r^2}.$$

При наблюдении полного транзита Земли по диску Солнца с той же точки пространства, поток (Φ) излучения, приходящий к приемнику излучения будет равен

$$\Phi = I (\Omega_{\odot} - \Omega_{\oplus}) = I (\Omega_{\odot} - \Omega_{\oplus}) = \pi I \frac{(\mathfrak{R}_{\odot}^2 - \mathfrak{R}_{\oplus}^2)}{r^2}.$$

Тогда относительное изменение потока излучения представляется в виде:

$$\eta = \frac{\Phi_0 - \Phi}{\Phi_0} \times 100\% = \left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\odot} \right)^2 \times 100\% = \gamma^2 \times 100\% = 8.39 \cdot 10^{-3}\%. \quad (36)$$

Амплитудой падения блеска Солнца при полном транзите планеты по его диску называется изменение звездной величины центрального светила, в силу указанного феномена, т.е.

$$\begin{aligned} \Delta m_\odot &= m_\odot - m_\odot^{(0)} = -2.5 \lg \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right) = -2.5 \lg \left[1 - \left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\odot} \right)^2 \right] = \\ &= -2.5 \lg e \ln [1 - \gamma^2], \\ \Delta m_\odot &\approx 2.5 \lg e \gamma^2 \approx 10^{-4\text{m}}. \end{aligned} \quad (37)$$

При записи последнего выражения мы учли, что $\ln(1+x) \approx x$, при $x \ll 1$. Очевидно, что величины η и Δm_\odot не зависят от величины r и справедливы для любых расстояний, удовлетворяющих условию $r_\oplus \ll r$.

Ответ: представляется результатами (33)-(37). ($S_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Кривая блеска НАТ-R-7 и определение отношения радиусов тел»

Решение: прежде всего, попытаемся разобраться как образуется кривая блеска 4. Отметим, что необходимым условием для наблюдения транзитов (т.е. явлений прохождения планеты по диску материнской звезды) экзопланеты является условие для наклона орбиты экзопланеты – $i_p \approx 90^\circ$, т.е. экзопланетная система должна быть расположена к земному наблюдателю "с ребра". Это приводит к регулярному незначительному ослаблению блеска системы. Итак, пусть в начальный момент планета находится в положении (1) своей орбиты, в фазе затмения телом материнской звезды, см. рис. 15. В этом случае мы наблюдаем плоский участок (1) вторичного минимума кривой блеска, здесь вклад в поток дает лишь излучение звезды. При выходе из-за тела звезды – (2) планета ориентирована к наблюдателю дневной стороной и потому суммарный поток приходящий от данной системы обусловлен излучением звезды и отраженным излучением экзопланеты – положение (2) на кривой блеска. По мере удаления от центрального светила, положения (3)-(4), фаза экзопланеты падает, а с ней уменьшается суммарный поток. Данная тенденция сохраняется при движении планеты по ближней части своей орбиты – положения (5)-(6). В положении (7) планета движется по диску звезды,

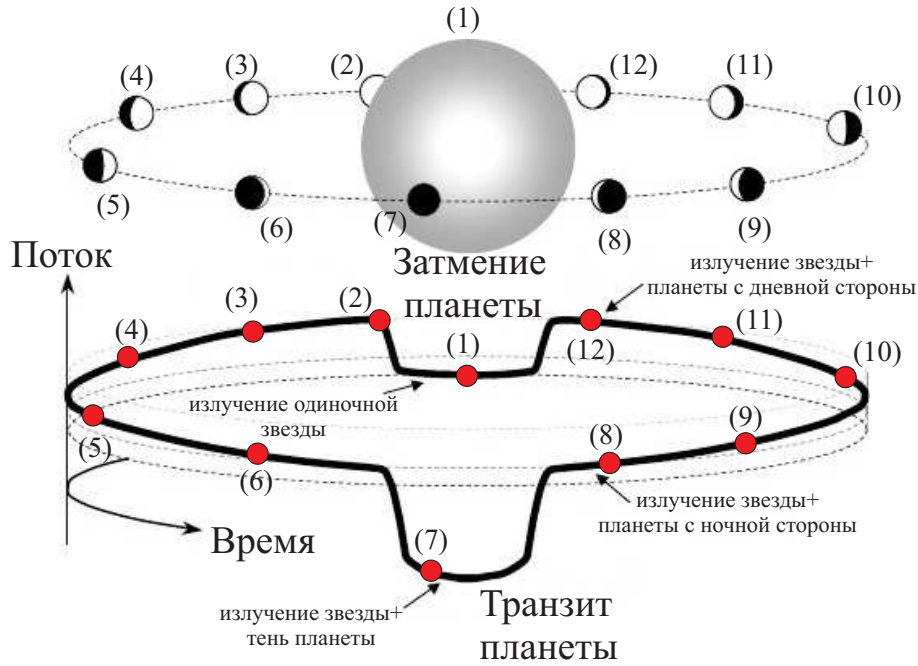


Рис. 15: к определению кривой блеска звезды с транзитной экзопланетой.

при этом ориентирована ночной стороной к наблюдателю и сама не излучает, но при этом покрывает часть диска центрального светила. В результате на кривой блеска это отражается в форме главного минимума, с овальным дном. "Овальность дна" обусловлена тем, что планета в разные моменты транзита покрывает разные участки поверхности звезды, обладающие разной яркостью. Последнее обусловлено классическим потемнением видимого диска звезды к краю (данный феномен хорошо изучен на примере Солнца).

После выхода планеты из фазы транзита, она продолжает движение (положения – (8)-(12)), непрерывно увеличивая свою фазу и давая все большей вклад в суммарный поток. И затем процесс повторяется.

Глубиной транзита называется отношение разности потоков излучения от звезды вне транзита экзопланеты (Φ_0) и во время транзита (Φ_t) к потоку излучения вне транзита (по сути, это относительное изменение потока), т.е.

$$\Delta F = \frac{\Phi_0 - \Phi_t}{\Phi_0}. \quad (38)$$

При наблюдении звезды (вне транзита) с какой-либо удаленной точки пространства, поток (Φ_0) излучения, приходящий к приемнику излучения, равен произведению силы света I и телесного угла Ω_* , под которым наблюдается звезда с данной точки:

$$\Phi_0 = I \Omega_* = I \frac{\pi \mathcal{R}_*^2}{r^2}.$$

При наблюдении полного транзита экзопланеты по диску звезды с той же точки пространства, поток (Φ) излучения, приходящий к приемнику излуче-

ния будет равен

$$\Phi_t = I(\Omega_* - \Omega_p) = I(\Omega_* - \Omega_p) = \pi I \frac{(\mathfrak{R}_*^2 - \mathfrak{R}_p^2)}{r^2}.$$

Тогда относительное изменение потока излучения представляется в виде:

$$\Delta F = \frac{\Phi_0 - \Phi}{\Phi_0} = \left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = \left(\frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{R}_*}\right)^2 = \gamma^2, \quad \text{где } \gamma = \left(\frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{R}_*}\right). \quad (39)$$

По рис. 4, находим значение относительного потока звезды, в главном минимуме (соответствующем транзиту экзопланеты по диску центрального светила) $\Phi/\Phi_0 = 0.9934$, тогда $\Delta F = 1 - 0.9934 = 0.0066$. В результате

$$\gamma = \frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{R}_*} = \sqrt{\Delta F} = 8.124 \cdot 10^{-2}. \quad (40)$$

По рис. 15 легко определить синодический (он же сидерический) период обращения экзопланеты, как расстояние между двумя главными минимумами – $S_p = T_p = 2.206$ сут.

Ответ: $\frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{R}_*} = \sqrt{\Delta F}$, $\Delta F = 0.0066$, $\mathfrak{R}_p/\mathfrak{R}_* = 8.124 \cdot 10^{-2}$; $S_p = T_p = 2.206$ сут. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Определение вероятности обнаружения транзита экзопланеты»

Решение: а) как было отмечено, в решении предыдущей задачи, необходимым условием для наблюдения транзита экзопланеты является условие для наклона орбиты экзопланеты – $i_p \approx 90^\circ$, т.е. экзопланетная система должна быть расположена к земному наблюдателю "с ребра". Поскольку всевозможные ориентации орбиты экзопланеты равновероятны, то это эквивалентно тому, что мы можем рассматривать данную звезду с экзопланетой с разных направлений, но сможем в принципе, видеть транзит, если только попадем в *область транзита* (см. об этом подробнее решение задачи № 12, данного этапа). Данной области отвечает телесный угол Ω_t , определяемый выражением (34). Телесный угол, отвечающий всей сфере (всем возможным направлениям, с которых можно рассматривать данную систему), равен 4π . Тогда вероятность принципиальной возможности детектирования феномена транзита экзопланеты по диску материнской звезды есть

$$P_t = \frac{\Omega_t}{4\pi} = \frac{\mathfrak{R}_* (1 + \gamma)}{a (1 - \varepsilon^2)}. \quad (41)$$

б) **Центральным транзитом** планеты по диску материнской звезды называется транзит, при котором планета перемещается по диаметру видимого диска звезды (см. рис. 16). Вероятность данного события (P_c) можно

определить отношением телесного угла Ω_c , отвечающего области на небесной сфере (если смотреть из центра звезды), из точек которой можно будет наблюдать указанный феномен к полному телесному углу всей сферы (равному 4π).

$$P_c = \frac{\Omega_c}{4\pi}. \quad (42)$$

Телесному углу Ω_c на небесной сфере отвечает полоса (пояс), заключенная между прямыми АВ и АЕ и шириной δ . Последний параметр определяется из треугольника $\triangle ABC$:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{BC}{AC} = \frac{\mathfrak{R}_p}{r_p - \mathfrak{R}_*}, \Rightarrow \frac{\delta}{2} \approx \frac{\gamma}{r_p/\mathfrak{R}_* - 1}.$$

Полагая далее, что $\mathfrak{R}_* \ll r_p$, с учетом (30), в итоге получаем выражение для δ :

$$\delta \approx 2 \frac{\mathfrak{R}_* \gamma}{a(1 - \varepsilon_p^2)} (1 + \varepsilon_p \cos \varphi). \quad (43)$$

Очевидно, что полный телесный угол представляется в виде:

$$\begin{aligned} \Omega_c &= \int d\Omega_c = \int \delta d\varphi = 2 \frac{\mathfrak{R}_* \gamma}{a(1 - \varepsilon_p^2)} \int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon_p \cos \varphi) d\varphi = \\ &= 2 \frac{\mathfrak{R}_* \gamma}{a(1 - \varepsilon_p^2)} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi + \varepsilon_p \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right]. \\ \Omega_c &= 4\pi \frac{\mathfrak{R}_* \gamma}{a(1 - \varepsilon_p^2)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Для определения вероятности детектирования феномена центрального транзита экзопланеты по диску материнской звезды в данный момент времени учтем, что время транзита планеты, согласно (21), можно представить в виде:

$$\tau_p = \frac{S_p}{\pi} \arcsin \left(\frac{\mathfrak{R}_*}{a} \right). \quad (45)$$

Данный транзит обязательно должен произойти в течение временного интервала $(0, S_p)$. Следовательно, вероятность того, что наблюдатель в данный

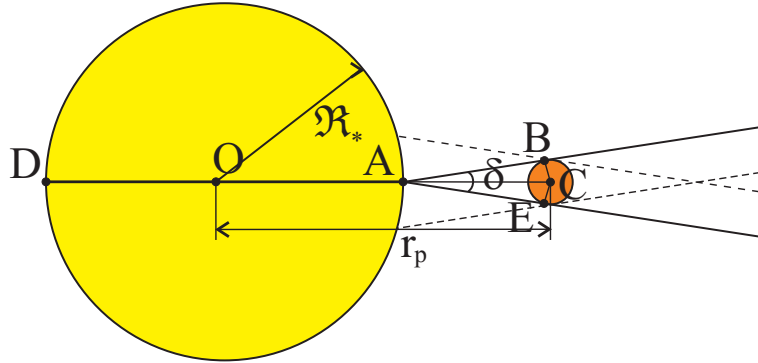


Рис. 16: к определению вероятности центрального транзита экзопланеты.

момент времени попадет на транзит экзопланеты есть

$$P_{pres} = \frac{\tau_p}{S_p} \cdot P_c = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(1 - \varepsilon_p^2)} \frac{\mathfrak{R}_*}{a} \arcsin \left(\frac{\mathfrak{R}_*}{a} \right). \quad (46)$$

Выполним численный анализ полученных результатов на примере Солнца и всех классических планет. Численные результаты представлены в таблице 3.

Планета	a , а.е.	ε	R , км	γ	P_t	P_{pres}
Меркурий	0.387099	0.205631	2439.7	$3.508 \cdot 10^{-3}$	$1.258 \cdot 10^{-2}$	$1.682 \cdot 10^{-7}$
Венера	0.723332	0.0068	6051.8	$8.701 \cdot 10^{-3}$	$6.484 \cdot 10^{-2}$	$1.144 \cdot 10^{-7}$
Земля	1.000	0.0167112	6371	$9.160 \cdot 10^{-3}$	$4.693 \cdot 10^{-3}$	$6.304 \cdot 10^{-8}$
Марс	1.52366	0.0933941	3390	$4.874 \cdot 10^{-3}$	$3.093 \cdot 10^{-3}$	$1.457 \cdot 10^{-8}$
Юпитер	5.20427	0.048775	69911	$1.005 \cdot 10^{-1}$	$9.855 \cdot 10^{-4}$	$2.560 \cdot 10^{-8}$
Сатурн	9.58202	0.0557232	58232	$8.373 \cdot 10^{-2}$	$5.275 \cdot 10^{-4}$	$6.294 \cdot 10^{-9}$
Уран	19.1893	0.0472201	25362	$3.647 \cdot 10^{-2}$	$2.517 \cdot 10^{-4}$	$6.829 \cdot 10^{-10}$
Нептун	30.0709	0.00867797	24622	$3.540 \cdot 10^{-2}$	$1.601 \cdot 10^{-4}$	$2.694 \cdot 10^{-10}$

Таблица 3: параметры орбиты и радиусы классических планет (исходные данные), вычисленные вероятности детектирования их транзитов.

Из данных таблицы следует, что чем ближе планета к Солнцу и чем больше ее размеры, тем больше определенные выше вероятности. Наибольшими значениями вероятностей детектирования транзита обладает Меркурий ($P_t \sim 10^{-2}$, $P_{pres} \sim 10^{-7}$), а наименьшими – Нептун ($P_t \sim 10^{-4}$, $P_{pres} \sim 10^{-10}$).

Ответ: аналитические результаты представлены выражениями (41) и (46), численные результаты представлены в таблице 3. ($S_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Времена транзитов (затмений) экзопланеты НАТ-Р-7б»

Решение: рассмотрим случай нецентрального полного транзита (см. рис. 17). В этом случае планета будет двигаться по дуге окружности, незначительно отличающейся от хорды AB длиной Δ . Хорда отстоит от диаметра планеты на величину $p = a \cos i$. В момент времени t_1 , планета начинает двигаться по диску звезды полностью на него переходит в момент времени t_2 . До момента времени t_3 наблюдается полный транзит планеты. С момента t_3 и до момента t_4 планета сходит с диска центрального светила. В момент t_4 транзит завершен.

а) Следовательно, полное время транзита (затмения) есть

$$\Delta t_t = t_4 - t_1 = 2(t_4 - t_0).$$

Пусть V – орбитальная скорость планеты, определяемая выражением вида:

$$V = \frac{2\pi a}{P}. \quad (47)$$

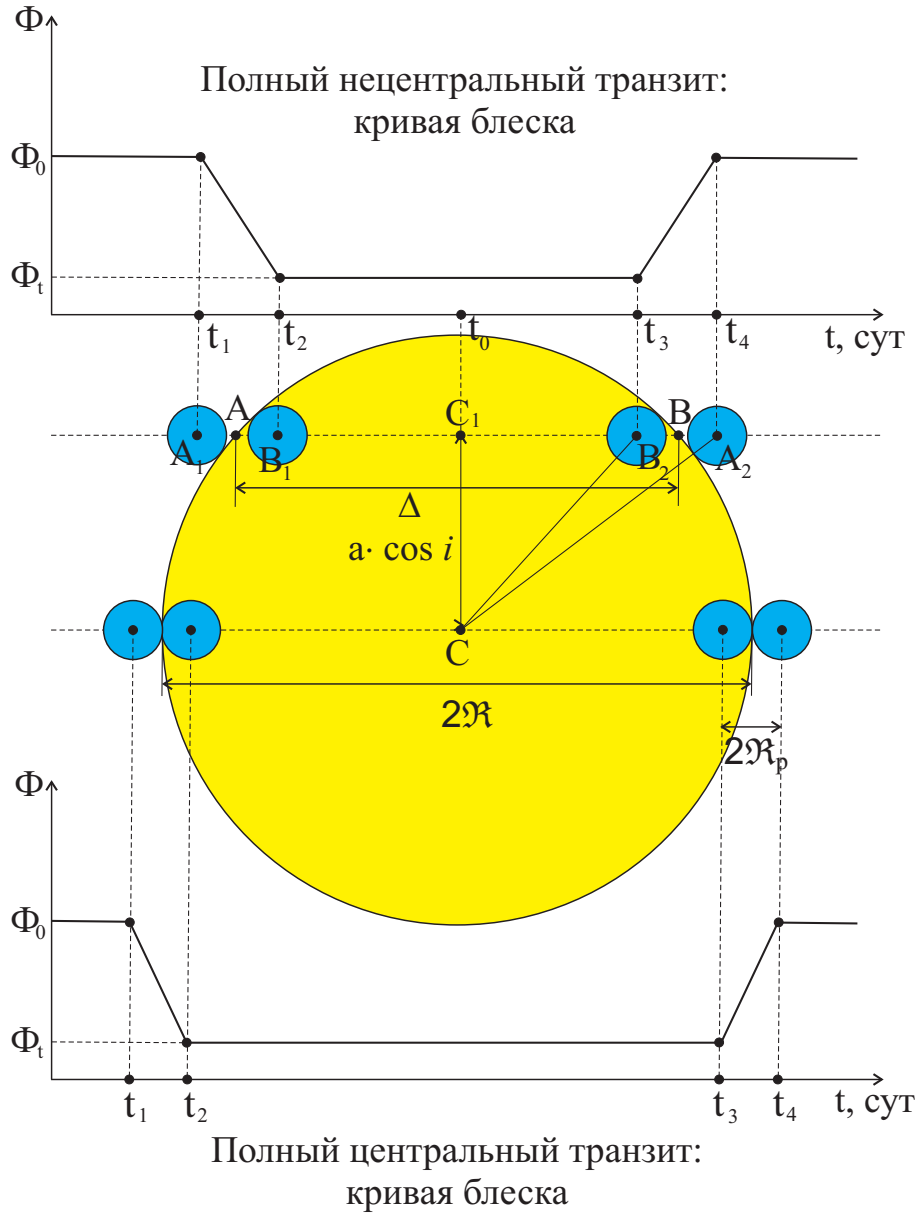


Рис. 17: к определению кривой блеска звезды с транзитной экзопланетой.

За промежуток времени Δt_t планета проходит по орбите угол α . Если смотреть сверху на движение планеты (т.е. когда картинная плоскость совпадает с плоскостью в которой находится наблюдатель и центр звезды), то планета будет двигаться уже по эллипсу, причем его радиус во время транзита будет равен $r = a \sin i$.

В момент t_4 планета сместится от центра диска на угол $\alpha/2$ и окажется в точке A_2 , причем расстояние от точки C_1 есть C_1A_2 и с одной стороны есть

$$C_1A_2 = r \sin \frac{\alpha}{2} = a \sin i \sin \frac{\alpha}{2},$$

с другой стороны, по теореме Пифагора

$$(C_1A_2)^2 = (CA_2)^2 - (CC_1)^2, \Rightarrow$$

$$a^2 \sin^2 i \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (\mathfrak{R}_* + \mathfrak{R}_p)^2 - (a \cos i)^2, \Rightarrow$$

тогда интервал Δt_t можно определить как

$$\Delta t_t = \frac{a \cdot \alpha}{V} = \frac{P}{\pi} \arcsin \left[\frac{\mathfrak{R}_*}{a} \sqrt{\frac{(1 + \gamma)^2 - (a/\mathfrak{R}_*)^2 \cos^2 i}{1 - \cos^2 i}} \right], \quad \text{где } \gamma = \frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{R}_*}. \quad (48)$$

Для определения времени полного транзита (затмения) Δt_f , следует провести аналогичные рассуждения для треугольника $\Delta C C_1 B_2$ и учесть что $C B_2 = \mathfrak{R}_* - \mathfrak{R}_p$. В итоге имеем

$$\Delta t_f = \frac{P}{\pi} \arcsin \left[\frac{\mathfrak{R}_*}{a} \sqrt{\frac{(1 - \gamma)^2 - (a/\mathfrak{R}_*)^2 \cos^2 i}{1 - \cos^2 i}} \right]. \quad (49)$$

По рис. 4 указанные времена составляют $\Delta t_t = 4.431$ часа, $\Delta t_f = 2.585$ часа.

Ответ: аналитические результаты представлены формулами (48), (49). По рис. 4 указанные времена для НАТ-Р-7b составляют $\Delta t_t = 4.431$ часа, $\Delta t_f = 2.585$ часа. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Определение основных параметров системы "НАТ-Р-7"»

Решение: выпишем все уравнения (см. решения задач 13 и 15), устанавливающие связь между искомыми и известными величинами:

$$\gamma = \frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{R}_*} = \sqrt{\Delta F} = 8.124 \cdot 10^{-2}, \quad (50)$$

$$\Delta t_t = \frac{P}{\pi} \arcsin \left[\frac{\mathfrak{R}_*}{a} \sqrt{\frac{(1 + \gamma)^2 - (a/\mathfrak{R}_*)^2 \cos^2 i}{1 - \cos^2 i}} \right] = 4.431 \text{ часа}, \quad (51)$$

$$\Delta t_f = \frac{P}{\pi} \arcsin \left[\frac{\mathfrak{R}_*}{a} \sqrt{\frac{(1 - \gamma)^2 - (a/\mathfrak{R}_*)^2 \cos^2 i}{1 - \cos^2 i}} \right] = 2.585 \text{ часа}, \quad (52)$$

Данные уравнения следует дополнить третьим законом Кеплера

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(\mathfrak{M}_* + \mathfrak{M}_p)}, \quad (53)$$

и уравнением (4). Очевидно, что полученная система является замкнутой для искоемых величин: \mathfrak{R}_* , \mathfrak{M}_* , a , i , \mathfrak{R}_p , в предположении $\mathfrak{M}_p \ll \mathfrak{M}_*$.

Перепишем уравнения (51), (52) иначе

$$\alpha = \sin^2 \left(\frac{\pi \Delta t_t}{P} \right) = x^2 \frac{(1 + \gamma)^2 - (1/x)^2 \cos^2 i}{1 - \cos^2 i} = 6.755 \cdot 10^{-2}, \quad (54)$$

$$\beta = \sin^2 \left(\frac{\pi \Delta t_f}{P} \right) = x^2 \frac{(1 - \gamma)^2 - (1/x)^2 \cos^2 i}{1 - \cos^2 i} = 2.334 \cdot 10^{-2}, \quad x = \frac{\mathfrak{R}_*}{a}. \quad (55)$$

Из уравнений (54)-(55) следует, что

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(1 + \gamma)^2 - (1/x)^2 \cos^2 i}{(1 - \gamma)^2 - (1/x)^2 \cos^2 i}, \quad (\alpha - \beta) = x^2 \frac{(1 + \gamma)^2 - (1 - \gamma)^2}{1 - \cos^2 i}. \quad (56)$$

Из последнего уравнения (56) следует, что

$$\cos^2 i = 1 - x^2 \frac{4\gamma}{(\alpha - \beta)}, \quad \Rightarrow \quad i = \arccos \left[\pm \sqrt{1 - x^2 \frac{4\gamma}{(\alpha - \beta)}} \right]. \quad (57)$$

С другой стороны, из первого уравнения (56) следует выражение для $\cos^2 i$:

$$\cos^2 i = \frac{\alpha(1 - \gamma)^2 - \beta(1 + \gamma)^2}{\alpha - \beta} x^2.$$

Приравняв правые части двух последних результатов, получаем уравнение вида:

$$\frac{\alpha(1 - \gamma)^2 - \beta(1 + \gamma)^2}{\alpha - \beta} x^2 = 1 - x^2 \frac{4\gamma}{(\alpha - \beta)}, \quad \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{(\alpha - \beta)}{\alpha(1 - \gamma)^2 - \beta(1 + \gamma)^2 + 4\gamma}} = 0.3530. \quad (58)$$

С использованием (57) получаем значение $i = 82.94^\circ$. Далее учитывая, что $a = \mathfrak{R}_*/x$ (здесь выражено в а.е., а чтобы перейти к радиусам Солнца следует домножить на переводной коэффициент $\eta = 4.649 \cdot 10^{-3} \mathfrak{R}_\odot/\text{а.е.}$), можно переписать уравнение (53), с учетом (4) в виде:

$$P^2 \approx \frac{4\pi^2 \eta^3 \mathfrak{R}_*^3}{G x^3 \mathfrak{M}_*} = \frac{4\pi^2 k^3 \eta^3 \mathfrak{M}_*^{3\chi-1}}{G x^3},$$

Аналогичное соотношение можно записать для Земли и Солнца:

$$P_\oplus^2 = \frac{4\pi^2 a_\oplus^3}{G \mathfrak{M}_\odot}.$$

Поделим одно соотношение на другое:

$$\left(\frac{P}{P_\oplus} \right)^2 = \frac{k^3 \eta^3 \mathfrak{M}_*^{3\chi-1} \mathfrak{M}_\odot}{x^3 a_\oplus^3}, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{M}_* = \left[\frac{x^3 a_\oplus^3}{k^3 \eta^3 \mathfrak{M}_\odot} \left(\frac{P}{P_\oplus} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3\chi-1}}. \quad (59)$$

Если использовать систему астрофизических единиц $\mathfrak{M}_\odot = 1$, (т.е. масса звезды в массах Солнца), $a_\oplus = 1$ а.е., $P_\oplus = 1$ год (т.е. P следует выразить в годах), то

$$\Rightarrow \mathfrak{M}_* = \left[\frac{x^3 P^2}{\eta^3 k^3} \right]^{\frac{1}{3\chi-1}} = 4.115 \mathfrak{M}_\odot. \quad (60)$$

В итоге радиусы звезды и планеты, а также большая полуось есть

$$\mathfrak{R}_* = 4.036 \cdot \mathfrak{R}_\odot, \quad \mathfrak{R}_p = \gamma \mathfrak{R}_* = 3.19 \mathfrak{R}_J, \quad a = \mathfrak{R}_*/x = 5.315 \cdot 10^{-2} \text{ а.е.}, \quad (61)$$

здесь $\mathfrak{R}_J = 71492$ км – средний экваториальный радиус Юпитера.

Результаты	i , град	a , $\times 10^{-2}$ а.е.	\mathfrak{M}_* , \mathfrak{M}_\odot	\mathfrak{R}_* , \mathfrak{R}_\odot	\mathfrak{R}_p , \mathfrak{R}_J
Наши	82.94	5.315	4.115	4.036	3.19
Проф-лы	$85.7^{+3.5}_{-3.1}$	3.77 ± 0.05	$1.47^{+0.8}_{-0.5}$	$1.84^{+0.23}_{-0.11}$	$1.363^{+0.195}_{-0.087}$

Таблица 4: Основные параметры для системы НАТ-Р-7, полученные в рамках данной задачи и профессионалами.

В таблице 4 представлены для сравнения значения основных параметров системы НАТ-Р-7, полученные в настоящей задаче и результаты для тех же параметров, полученные профессионалами. Из таблицы видно, что лишь для наклона наш результат согласуется с результатами профессионалов. Для остальных параметров, наши значения получились несколько завышенными. Причина в том, что здесь использовалась одна из первых кривых блеска, с малой статистикой, которая была еще весьма неточной, по ней с существенной ошибкой была получена величина γ , которая и определила завышенные значения для остальных искомым величин. Профессионалы использовали более позднюю, точную кривую блеска и более точные методы обработки данных.

Ответ: представлен выражениями (57), (60), (61); численные результаты представлены в таблице 4. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Максимальное количество горячих юпитеров, которые можно зарегистрировать в наблюдениях транзитным методом»

Дано:

$$\begin{aligned} &\text{поле} - 2^\circ \times 2^\circ, \\ &D_T = 40 \text{ см}, \\ &\Delta m = 1^m, \\ &n = 0.02 \text{ пк}^{-3}, \\ &\alpha_{HL} = 0.03. \end{aligned}$$

Найти:

$$N_f, N_p - ?$$

Решение:

Прежде всего определим максимальное расстояние, на котором может находиться звезда, принадлежащая одному из спектральных классов, указанных в условии, для которой еще можно зафиксировать транзит экзопланеты. Для этого вычислим проникающую силу телескопа:

$$m_T = 2.1^m + 5^m \lg D_T[\text{мм}] = 2.1^m + 5^m \lg D_T[\text{мм}] = 15.1^m.$$

Следовательно, максимальная звездная величина такой звезды есть

$$m_{\max} = m_T - \Delta m = 14.1^m.$$

Тогда расстояние до данной звезды, в предположении, что ее абсолютная звездная величина равна солнечной $M_\odot = 4.74^m$ есть

$$\lg r_{\max} = 1 + 0.2(m_{\max} - M_\odot) = 2.872, \quad \Rightarrow \quad r_{\max} = 10^{2.872} = 745 \text{ пк}.$$

Следовательно, общее количество звезд, находящихся в пределах сферы радиуса r_{\max} , с центром, совпадающим с Солнцем, есть

$$N_* = n V_{\text{sphere}} = n \frac{4}{3} \pi r_{\max}^3 = 3.464 \cdot 10^7 \text{ звезд.} \quad (62)$$

Количество таких звезд, которые имеют экзопланету типа «горячий юпитер» есть

$$N_{HJ} = \alpha_{HJ} N_* = 1.039 \cdot 10^6 \text{ звезд.} \quad (63)$$

Количество последних звезд, попадающих в участок небосвода, принадлежащего полю зрения телескопа+ПЗС-камеры:

$$N_{\text{cam}} = N_{HJ} \frac{2^\circ \times 2^\circ}{41253 \text{ кв. град}} = 100.7 \text{ звезд,}$$

здесь учтено, что телесный угол отвечающей всей поверхности небосвода равен 41253 кв. град.

Поскольку всевозможные ориентации орбиты юпитера равновероятны, то вероятность, что земной наблюдатель (Солнце) принадлежит транзитной зоне определяется выражением (41) (см. задачу 14 настоящего релиза). Следовательно, максимальное количество звезд, а, следовательно, и экзопланет типа «горячий юпитер», которые можно, в принципе, зарегистрировать в наблюдениях есть

$$N_f = P_t N_{\text{cam}} = \frac{\mathfrak{R}_*}{a} (1 + \gamma) \frac{2^\circ \times 2^\circ}{41253 \text{ кв. град}} \alpha_{HJ} n \frac{4}{3} \pi r_{\max}^3 = 10.31 \text{ звезд.} \quad (64)$$

Вероятность того, что наблюдатель в данный момент времени попадет на транзит экзопланеты определяется выражением (46) (см. задачу 14 настоящего релиза). Следовательно, максимальное количество звезд, а, следовательно, и экзопланет типа «горячий юпитер», которые можно зарегистрировать в данный момент есть

$$N_p = \frac{\tau_p}{S_p} N_f = \frac{\tau_p}{S_p} P_t N_{\text{cam}},$$

где τ_p определяются выражениями (45), S_p есть синодический период обращения экзопланеты.

$$N_p = \frac{1}{\pi} (1 + \gamma) \frac{\mathfrak{R}_*}{a} \arcsin \left(\frac{\mathfrak{R}_*}{a} \right) \frac{2^\circ \times 2^\circ}{41253 \text{ кв. град}} \alpha_{HJ} n \frac{4}{3} \pi r_{\max}^3 = 0.31 \text{ звезд.} \quad (65)$$

Очевидно, что для увеличения количества экзопланет N_p необходимо увеличить площадь ПЗС-камеры, и использовать телескоп с большей проникающей силой.

Отметим также, что время, в течение которого для всех N_f экзопланет можно будет зафиксировать транзиты на данном участке небосвода определяется периодом обращения горячего юпитера по орбите, последний определяется третьим законом Кеплера:

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(\mathcal{M}_\odot + \mathcal{M}_J)}} = 4.08 \text{ сут.}$$

Однако, с Земли трудно организовать непрерывные наблюдения данного участка небосвода в течение указанного временного интервала. Именно поэтому сегодня все чаще поиск транзитов экзопланет ведут из космоса.

Ответ: $N_f = 10.31$ звезд, $N_p = 0.31$ звезд. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Открытие гравитационных волн и слияние черных дыр»

Решение: прежде всего необходимо понять как образуется подобный сигнал. Рассмотрим данный вопрос с точки зрения теории. Пусть в начальный момент два гравитирующих тела (черные дыры или ЧД) находятся на расстоянии, сравнимом с их размерами (см. рис. 18). Их мощные гравитационные поля, переменные в пространстве и во времени заставляют колебаться "пространство-время", подобно колебаниям поверхности воды при ударе о ее поверхность. И эти колебания собственно и регистрирует лазерный интерферометр проекта Advanced LIGO. В результате излучения гравитационных волн их полная механическая энергия уменьшается и ЧД вынуждены сближаться друг к другу, согласно закону (5). По мере сближения мощность излучения гравитационных волн быстро нарастает, согласно (6) и темпы взаимного падения также нарастают, при этом ЧД движутся по плотно закрученным спиральям. Сигнал достигает максимума во время слияния ЧД. После этого образуется новая вращающаяся черная дыра, от которой сигнал существенно меньше и с течением времени он еще плавно падает.

1. Для определения частоты (ω_0) и периода (P_0) обращения черных дыр вокруг общего центра масс в момент слияния необходимо определить точно расстояние между двумя последними (1 и 2 на рис. 19) высокими пиками кривой сигнала и перевести их в секунды. В результате получим время $T_W = 4.20 \cdot 10^{-3}$ с – это есть по сути, период колебаний гравитационной волны. Однако, период обращения системы $P_0 = 2 T_W = 8.40 \cdot 10^{-3}$ с, поскольку каждый горб гравитационной волны связан с прохождением одной из компонент перед другой. Следовательно, $\omega_0 = 2\pi/P_0 = 748$ рад/с.

2. Для определения массы черных дыр \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 и их радиусов \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 , воспользуемся радиусом Шварцшильда для черной дыры

$$\mathcal{R}_1 = \frac{2G\mathcal{M}_1}{c^2}, \quad \mathcal{R}_2 = \frac{2G\mathcal{M}_2}{c^2}, \quad (66)$$

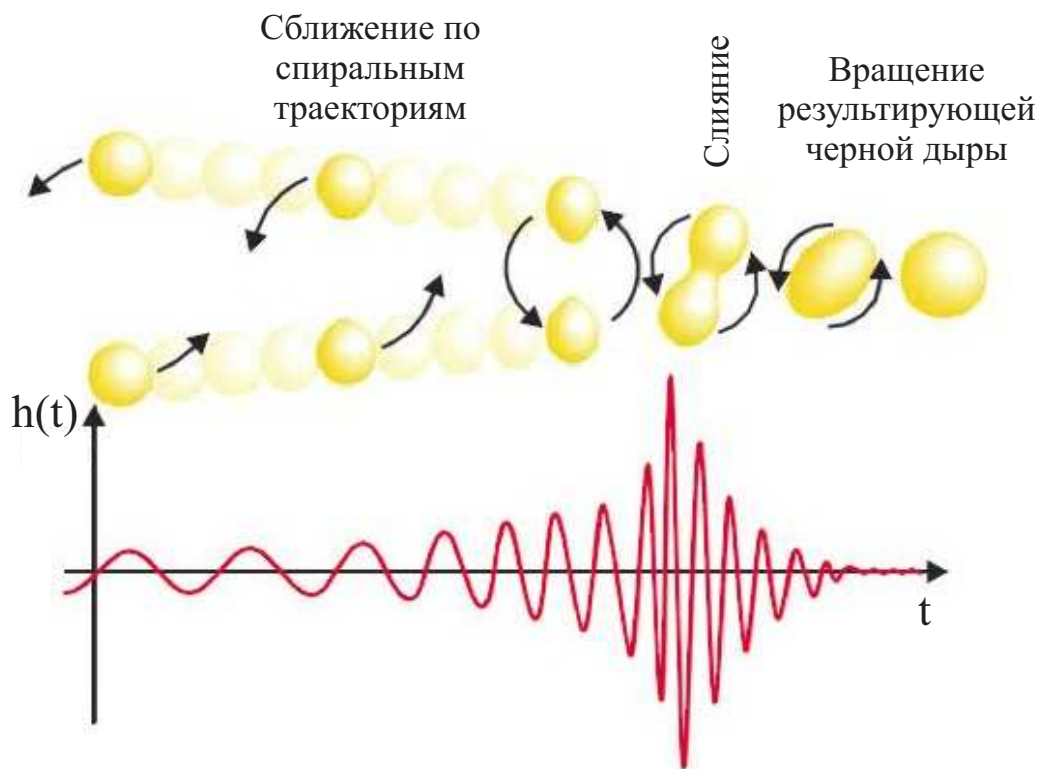


Рис. 18: к определению вопроса образования искомого сигнала в эксперименте Advanced LIGO.

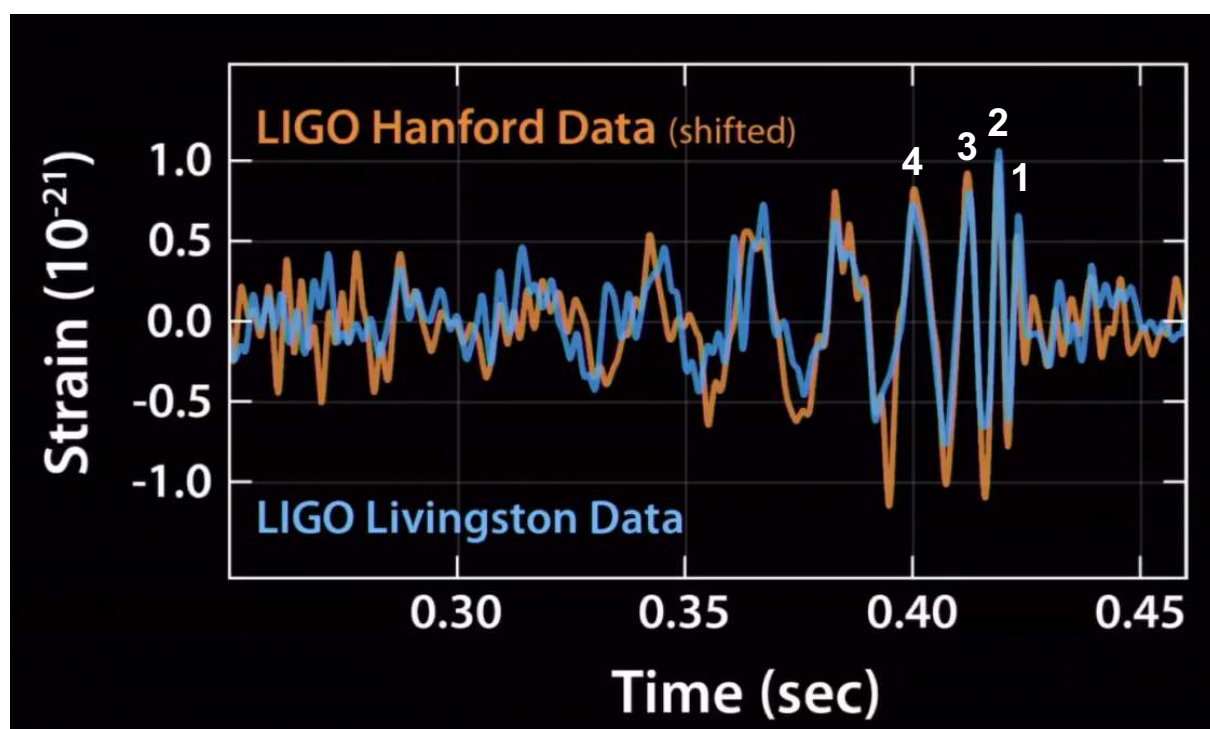


Рис. 19: к определению периода обращения системы ЧД.

и третьим обобщенным законом Кеплера:

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \frac{4\pi^2 a_0^3}{G P^2}, \quad (67)$$

В момент слияния дыр

$$a_0 = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = \frac{2G}{c^2}(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2). \quad (68)$$

В результате (67) можно представить в виде:

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \frac{32\pi^2 G^2}{c^6 P^2} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^3, \Rightarrow \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \frac{c^3 P}{4\sqrt{2} \pi G} = 95.94 \cdot \mathfrak{M}_\odot. \quad (69)$$

Соответствующее значение

$$a_0 = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = 283.4 \text{ км}. \quad (70)$$

С другой стороны, по условию задачи $\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_2 = 1.24$. В итоге решая полученную систему уравнений относительно $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ в итоге получаем значения

$$\mathfrak{M}_1 = 53.12 \cdot \mathfrak{M}_\odot, \quad \mathfrak{M}_2 = 42.83 \cdot \mathfrak{M}_\odot, \quad \mathfrak{R}_1 = 156.89 \text{ км}, \quad \mathfrak{R}_2 = 126.52 \text{ км}. \quad (71)$$

3. Оценим радиус новой дыры в предположении, что масса – сохраняющаяся величина (хотя на самом деле, это не совсем так), т.е.

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3, \Rightarrow \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = 283.4 \text{ км}. \quad (72)$$

4. Частоту ω_3 обращения образовавшейся черной дыры можно определить из закона сохранения момента импульса системы (предполагая, что исходные ЧД не имели осевого вращения):

$$L_1 + L_2 = L_3, \Rightarrow \mathcal{I}_1 \omega_0 + \mathcal{I}_2 \omega_0 = \mathcal{I}_3 \omega_3, \Rightarrow \omega_3 = \frac{\mathcal{I}_1 \omega_0 + \mathcal{I}_2 \omega_0}{\mathcal{I}_3}. \quad (73)$$

здесь $\mathcal{I}_{\{1,2,3\}}$ – моменты инерции исходных и конечной черных дыр соответственно. С учетом теоремы Гюйгенса-Штейнера данные величины представляются в виде:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{2}{5} \mathfrak{M}_1 \mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{M}_1 r_1^2, \quad \mathcal{I}_2 = \frac{2}{5} \mathfrak{M}_2 \mathfrak{R}_2^2 + \mathfrak{M}_2 r_2^2, \quad \mathcal{I}_3 = \frac{2}{5} \mathfrak{M}_3 \mathfrak{R}_3^2.$$

В последних выражениях r_1, r_2 – радиусы орбит ЧД в системе центра масс в момент слияния. Последние удовлетворяют условию:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} = \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1}, \quad r_1 + r_2 = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2, \Rightarrow r_2 = \mathfrak{R}_1, \quad r_1 = \mathfrak{R}_2.$$

С учетом (66) угловую скорость ω_3 представляется в виде:

$$\omega_3 = \frac{\frac{2}{5} \mathfrak{M}_1^3 + \mathfrak{M}_1^2 \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2^2 + \frac{2}{5} \mathfrak{M}_2^3}{\frac{2}{5} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^3} \omega_0 = 0.876 \omega_0 = 655.5 \text{ рад/с}. \quad (74)$$

5. Очевидно, что скорость взаимного падения, определяемая выражением (5), достигнет максимального значения при $r = a_0$:

$$V_r(a_0) = -\frac{64 G^3 (\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2) (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{5 c^5 a_0^3}, \Rightarrow$$

$$V_0 = V_r(a_0) = -\frac{8}{5}c \frac{(\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2)}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^2} = 0.395 c = 1.186 \cdot 10^5 \text{ км/с}. \quad (75)$$

6. Количество энергии, выделившейся в результате слияния черных дыр (в системе центра масс) можно определить как разность механических энергий до слияния и после:

$$\Delta E = \frac{\mathfrak{M}_1 V_1^2}{2} + \frac{\mathfrak{M}_2 V_2^2}{2} + \frac{1}{2} \mathcal{I}_1 \omega_0^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_2 \omega_0^2 - \frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{a_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \mathfrak{M}_3 \mathfrak{R}_3^2 \right) \omega_3^2 + \frac{3}{5} \frac{G \mathfrak{M}_3^2}{\mathfrak{R}_3}.$$

Первые два слагаемых в последнем выражении определяют кинетические энергии поступательного движения данных тел; третье и четвертое слагаемые – их кинетические энергии вращательного движения; пятое и последнее слагаемые – потенциальную энергию гравитационного взаимодействия; шестое – кинетическую энергию вращательного движения образовавшейся черной дыры.

В системе центра масс имеем

$$V_1 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} V_0, \quad V_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} V_0.$$

В итоге ΔE представляется в виде:

$$\begin{aligned} \Delta E = & \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)} V_0^2 + \frac{2G^2}{c^4} \left(\frac{2}{5} \mathfrak{M}_1^3 + \mathfrak{M}_1^2 \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2^2 + \frac{2}{5} \mathfrak{M}_2^3 \right) \omega_0^2 - \\ & - \frac{4}{5} \frac{G^2}{c^4} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^3 \omega_3^2 - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)} c^2 + \frac{3}{10} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) c^2, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\Delta E = 19.82 \mathfrak{M}_\odot c^2 = 3.54 \cdot 10^{48} \text{ Дж}. \quad (77)$$

7. Вычислим максимальную мощность излучения гравитационных волн, согласно формуле (6) при $r = a_0$:

$$N = \frac{32 G^4 (\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2)^2 (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{5 c^5 a_0^5} = \frac{1 c^5 (\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2)^2}{5 G (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^4} = 4.43 \cdot 10^{50} \text{ Вт}. \quad (78)$$

8. Расстояние (Δ) до источника, оценим по формуле (7) и значению амплитуды $h_{\max} = 10^{-21}$.

$$\Delta = \frac{1}{h_{\max}} \frac{G^2 \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{c^4 a_0} = \frac{1}{2 h_{\max}} \frac{G}{c^2} \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)} = 567 \text{ пк}. \quad (79)$$

Замечание: полученные результаты носят оценочный характер, и в основном по порядку величины совпадают с значениями, полученными профессионалами. Однако, точные расчеты искомых величин требуют использования

сложных моделей эволюции черных дыр и специальных инструментов Общей теории относительности.

Ответ: 1) $P_0 = 2T_W = 8.40 \cdot 10^{-3}$ с, $\omega_0 = 2\pi/P_0 = 748$ рад/с; результаты представлены формулами 2) (71), 3) (72), 4) (74), 5) (75), 6) (76)-(77), 7) (78), 8) (79). ($S_{\max} = 15$ баллов).
